

ПРО ПОТЕНЦІАЛ СТОКСА – ЖУКОВСЬКОГО ДЛЯ ТОРОЇДАЛЬНОЇ ПОРОЖНИНИ

Олександр Солодун

*Інститут математики НАН України,
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна,
e-mail: solodun@imath.kiev.ua*

We use harmonic polynomials for determination of approximate solutions of the Stokes – Zhukovskii potential and the associated inertia tensor for a solid body in the form of a horizontal truncated toroidal cavity completely filled with an ideal liquid. A variational method for solving the corresponding boundary-value problem is developed.

Для отримання наближених розв'язків потенціалу Стокса – Жуковського та пов'язаного з ним тензора інерції для твердого тіла у формі зрізаної горизонтальної тороїдальної порожнини, повністю заповненої ідеальною рідиною, використано гармонічні поліноми. Розроблено варіаційний метод розв'язування відповідної крайової задачі.

Вступ. У роботі [1] автором запропоновано наближено-аналітичний метод розв'язання задачі про власні коливання рідини у тороїдальних областях (задача про власні частоти та форми). Метою було зробити перший крок у математично та фізично коректному моделюванні коливань мегалітрових водонапірних веж із рідиною у випадку баків тороїдальної геометрії. Методологію побудови математично обґрунтованих модальних моделей, що описують лінійні та нелінійні коливання тіл із рідиною, до класу яких належать баки мегалітрових веж, ракет носіїв та ін., детально описано у монографіях [2 – 4]. Відповідні диференціальні рівняння пов'язують шість узагальнених координат, які відповідають за рух бака, та нескінченну кількість узагальнених координат, що описують збурені рухи вільної поверхні рідини. У лінійному наближенні останні узагальнені координати є розв'язками лінійних диференціальних (модальних) рівнянь, гідродинамічні коефіцієнти яких є інтегралами від форм коливання рідини та їх похідних. Останнє означає, що гідродинамічні коефіцієнти можна визначити за допомогою результатів з [1]. Аналогічні гідродинамічні коефіцієнти є в лінеаризованих виразах для гідродинамічних сил і моментів, що виникають у шести динамічних рівняннях руху бака. Однак формула для гідродинамічного моменту містить також тензор інерції, визначення якого пов'язано з так званим потенціалом Стокса – Жуковського.

Задача про потенціал Стокса – Жуковського не розглядалася у роботі [1]. Побудові наближених розв'язків цієї задачі присвячено цю статтю. Для цього адаптовано метод Рітца – Трефтіца за допомогою системи гармонічних функцій поліноміального вигляду. Такий підхід не новий. Раніше його активно застосовували для розв'язання задачі про потенціал Стокса – Жуковського (див., роботи [5, 6]) та ін., а останнім часом — для розв'язання

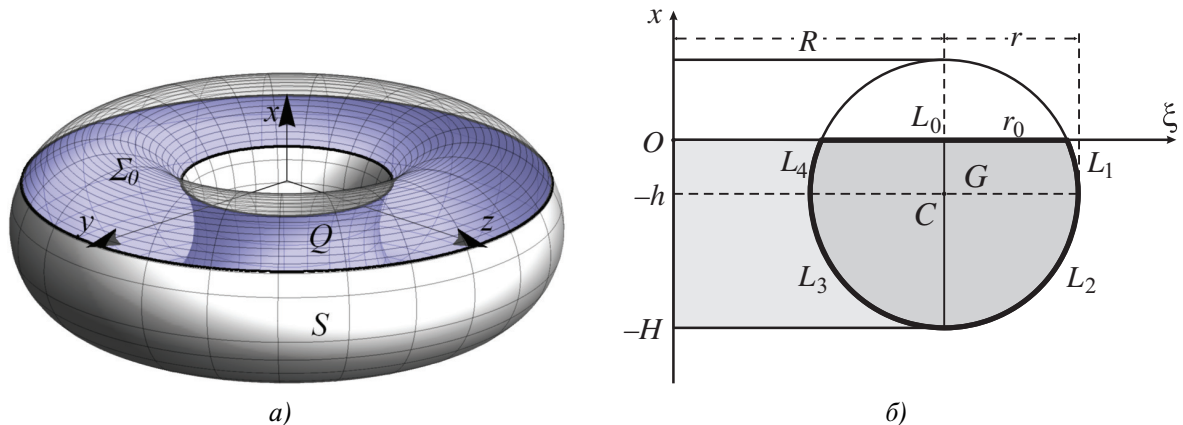


Рис. 1. (а) Геометрія області; (б) осьовий меридіональний переріз області.

такої задачі для конічних полостей [7]. Водночас у літературі відсутній аналіз областей застосування такого методу для тороїдальних порожнин. Такий аналіз буде проведено у цій роботі.

1. Постановка задачі. Розглянемо область Q , утворену жорсткою твердою кришкою кільцевої форми Σ_0 і бічними стінками S зрізаної горизонтальної тороїдальної порожнини. Порожнина повністю заповнена ідеальною нестисливою рідиною. Початок координат O помістимо в центрі зображеної блакитним кольором кришки, як представлено на рис. 1(б). Неоднорідна крайова задача Неймана про потенціал Стокса – Жуковського $\Omega_0(x, y, z)$ має вигляд [6]

$$\Delta \Omega_0 = 0, \quad \mathbf{r} \in Q, \quad \frac{\partial \Omega_0}{\partial \nu} = \mathbf{r} \times \nu, \quad \mathbf{r} \in S + \Sigma_0, \quad (1)$$

$\Omega_0(x, y, z) = (\Omega_{01}, \Omega_{02}, \Omega_{03})$, ν — зовнішня нормаль, S — змочувана бічна стінка, яка має розбиття $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$, твірними яких виступають відповідно криві L_1, L_2, L_3, L_4 із області меридіонального перетину G , що являють собою чвертинки твірного кола для цього тора (рис. 1(б)). Як відомо, загальний вигляд векторного добутку $\mathbf{r} \times \nu$ правої частини (1) має вигляд

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times \nu = & (y \cos(\widehat{\nu z}) - z \cos(\widehat{\nu y}))\mathbf{i} \\ & + (z \cos(\widehat{\nu x}) - x \cos(\widehat{\nu z}))\mathbf{j} + (x \cos(\widehat{\nu y}) - y \cos(\widehat{\nu x}))\mathbf{k}, \end{aligned}$$

де $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — орти координатних осей Ox, Oy, Oz відповідно. Завдяки осьовій симетрії цієї області доцільно перейти до циліндричної системи координат

$$x = X + h, \quad y = \xi \cos \eta, \quad z = \xi \sin \eta.$$

Зсув уздовж вертикальної осі h підбрано таким чином, щоб початок циліндричної системи збігався з центром незбуреної вільної поверхні, кут α_0 — кут, який опирається на катет h з вершиною у точці C . Враховуючи, що $\cos(\widehat{\nu y}) = \cos(\eta) \cos(\widehat{\nu \xi})$, $\cos(\widehat{\nu z}) = \sin(\eta) \cos(\widehat{\nu \xi})$, крайові умови для компонент вектора потенціалу Стокса – Жуковського набувають відповідно вигляду

$$\frac{\partial \Omega_{01}}{\partial \nu} = g_1 \equiv \begin{cases} 0 & \text{на } \Sigma_0, \\ y \cos \alpha_0 \sin \eta - z \cos \eta \cos \alpha_0 & \text{на } S_1, \\ y \cos \alpha_0 \sin \eta + z \cos \eta \cos \alpha_0 & \text{на } S_2, \\ -y \cos \alpha_0 \sin \eta + z \cos \eta \cos \alpha_0 & \text{на } S_3, \\ -y \cos \alpha_0 \sin \eta - z \cos \eta \cos \alpha_0 & \text{на } S_4, \end{cases} \quad (2a)$$

$$\frac{\partial \Omega_{02}}{\partial \nu} = g_2 \equiv \begin{cases} z & \text{на } \Sigma_0, \\ z \sin \alpha_0 - x \cos \alpha_0 \sin \eta & \text{на } S_1, \\ z \sin \alpha_0 + x \cos \alpha_0 \sin \eta & \text{на } S_2, \\ -z \sin \alpha_0 + x \cos \alpha_0 \sin \eta & \text{на } S_3, \\ -z \sin \alpha_0 - x \cos \alpha_0 \sin \eta & \text{на } S_4, \end{cases} \quad (2b)$$

$$\frac{\partial \Omega_{03}}{\partial \nu} = g_3 \equiv \begin{cases} -y & \text{на } \Sigma_0, \\ x \cos \alpha_0 \cos \eta - y \sin \alpha_0 & \text{на } S_1, \\ x \cos \alpha_0 \cos \eta + y \sin \alpha_0 & \text{на } S_2, \\ x \cos \alpha_0 \cos \eta + y \sin \alpha_0 & \text{на } S_3, \\ x \cos \alpha_0 \cos \eta + y \sin \alpha_0 & \text{на } S_4. \end{cases} \quad (2c)$$

Структура крайових умов (1) дозволяє відокремити кутову змінну та представити розв'язки Ω_{0i} , $i = 1, 2, 3$, у вигляді

$$\begin{aligned} \Omega_{01}(X, \xi, \eta) &= 0, & \Omega_{02}(X, \xi, \eta) &= F_0(X, \xi) \sin \eta, \\ \Omega_{03}(X, \xi, \eta) &= -F_0(X, \xi) \cos \eta, \end{aligned} \quad (3)$$

де функція $F_0(X, \xi)$ визначена у меридіональному перерізі G (рис. 1(б)) і є розв'язком такої задачі:

$$\xi^2 \frac{\partial^2 F_0}{\partial X^2} + \xi \frac{\partial F_0}{\partial \xi} + \xi^2 \frac{\partial^2 F_0}{\partial \xi^2} - F_0 = 0 \quad \text{в } G, \quad (4a)$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial X} = \xi \quad \text{при } X = 0, \quad (4b)$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial \nu} = -X \cos \alpha_0 + \xi \sin \alpha_0 \quad \text{при } \xi = \zeta_+(X), \quad (4c)$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial \nu} = -X \cos \alpha_0 - \xi \sin \alpha_0 \quad \text{при } \xi = \zeta_+(X), \quad (4d)$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial \nu} = X \cos \alpha_0 - \xi \sin \alpha_0 \quad \text{при } \xi = \zeta_-(X), \quad (4e)$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial \nu} = X \cos \alpha_0 + \xi \sin \alpha_0 \quad \text{при} \quad \xi = \zeta_-(X), \quad (4f)$$

тут бічну поверхню задано рівняннями $\zeta_{\pm}(X) = R \pm \sqrt{r^2 - (X+h)^2}$, а направляючі косинуси $\cos(\widehat{\nu\xi}) = 0$, $\cos(\widehat{\nu X}) = 1$ на L_0 , $\cos(\widehat{\nu\xi}) = \cos \alpha_0$, $\cos(\widehat{\nu X}) = \sin \alpha_0$ на L_1 , $\cos(\widehat{\nu\xi}) = \cos \alpha_0$, $\cos(\widehat{\nu X}) = -\sin \alpha_0$ на L_2 , $\cos(\widehat{\nu\xi}) = -\cos \alpha_0$, $\cos(\widehat{\nu X}) = -\sin \alpha_0$ на L_3 , $\cos(\widehat{\nu\xi}) = -\cos \alpha_0$, $\cos(\widehat{\nu X}) = \sin \alpha_0$ на L_4 .

Розв'язання задачі про потенціал Стокса – Жуковського необхідне для розрахунку симетричного тензора інерції рідини [5, 6]

$$\mathbf{J}_0^1 = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{011}^1 & \mathbf{J}_{012}^1 & \mathbf{J}_{013}^1 \\ \mathbf{J}_{012}^1 & \mathbf{J}_{022}^1 & \mathbf{J}_{023}^1 \\ \mathbf{J}_{013}^1 & \mathbf{J}_{023}^1 & \mathbf{J}_{033}^1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

з елементами

$$\mathbf{J}_{0ij}^1 = \rho \int_{S+\Sigma_0} \Omega_{0i} \frac{\partial \Omega_{0j}}{\partial \nu} dS = \rho \int_Q (\nabla \Omega_{0i}, \nabla \Omega_{0j}) dQ, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (6)$$

де ρ — густина рідини. Це дозволяє підрахувати тензор інерції системи *тіло-рідина* як суму тензора інерції рідини $\mathbf{J}_0^1$ і тензора інерції твердого тіла

$$\mathbf{J}^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{11}^0 & \mathbf{J}_{12}^0 & \mathbf{J}_{13}^0 \\ \mathbf{J}_{12}^0 & \mathbf{J}_{22}^0 & \mathbf{J}_{23}^0 \\ \mathbf{J}_{13}^0 & \mathbf{J}_{23}^0 & \mathbf{J}_{33}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{xx} & -\mathbf{J}_{xy} & -\mathbf{J}_{xz} \\ -\mathbf{J}_{yx} & \mathbf{J}_{yy} & -\mathbf{J}_{yz} \\ -\mathbf{J}_{zx} & -\mathbf{J}_{zy} & \mathbf{J}_{zz} \end{pmatrix},$$

де

$$\mathbf{J}_{xx} = \int_{Q_b} \rho_s (y^2 + z^2) dQ, \quad \mathbf{J}_{yy} = \int_{Q_b} \rho_s (x^2 + z^2) dQ, \quad \mathbf{J}_{xy} = \int_{Q_b} \rho_s xy dQ, \quad (7)$$

$$\mathbf{J}_{zz} = \int_{Q_b} \rho_s (x^2 + y^2) dQ, \quad \mathbf{J}_{xz} = \int_{Q_b} \rho_s xz dQ, \quad \mathbf{J}_{yz} = \int_{Q_b} \rho_s yz dQ. \quad (8)$$

Тут $\rho_s = \rho_s(x, y, z)$ — густина твердого тіла, Q_b — об'єм твердого тіла.

2. Метод Рітца – Трефца. Для визначення наближеного розв'язку задачі (4) застосуємо метод Рітца – Трефца [5]. За аналогією з методом розв'язання спектральної крайової задачі на власні значення [2, 7–9] представимо наближений розв'язок $F_0(X, \xi)$ у вигляді скінченної суми гармонійних функцій з невідомими множниками $b_k^{(m)} = \{\{b_k^{(m)}\}, \{b_k^{*(m)}\}\}$:

$$F_0(X, \xi) = \sum_{k=1}^{q_1} b_k^{(m)} w_{k+m-1}^{(m)}(X, \xi) + \sum_{k=1}^{q_2} b_k^{*(m)} w_{k+m-1}^{*(m)}(X, \xi), \quad (9)$$

а як гармонійний базис використовуємо базис поліноміального типу

$$w_k^{(m)}(X, \xi) = \frac{2(k-m)!}{(k+m)!} R^k P_k^{(m)}(\mu),$$

$$w_k^{*(m)}(X, \xi) = \frac{2(k-m)!}{(k+m)!} R^k Q_k^{(m)}(\mu),$$

де $R = \sqrt{X^2 + \xi^2}$ при $k \geq m$, $\cos \eta = X/R$, $k \geq m$, $P_k^{(m)}(\cos \eta)$, $Q_k^{(m)}(\cos \eta)$ — приєднані функції Лежандра першого та другого роду.

Використовуємо той факт, що розв'язок крайової задачі (4) еквівалентний знаходженню мінімуму квадратичного функціоналу (див. детальний висновок і доказ еквівалентності в [6]):

$$J(F_0) = \int_G \left(\xi \left(\frac{\partial F_0}{\partial X} \right)^2 + \xi \left(\frac{\partial F_0}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{1}{\xi} F_0^2 \right) dS - 2 \int_L \xi F_0 \mathfrak{g} dS, \quad (10)$$

де $L = L_0 + L_1 + L_2 + L_3 + L_4$, $\mathfrak{g} = (\xi \nu_X - X \nu_\xi)$ являє собою праві частини граничних умов неоднорідної крайової задачі (4)

$$\mathfrak{g} = \begin{cases} \xi & \text{на } L_0, \\ -X \cos \alpha_0 + \xi \sin \alpha_0 & \text{на } L_1, \\ -X \cos \alpha_0 - \xi \sin \alpha_0 & \text{на } L_2, \\ X \cos \alpha_0 - \xi \sin \alpha_0 & \text{на } L_3, \\ X \cos \alpha_0 + \xi \sin \alpha_0 & \text{на } L_4. \end{cases} \quad (11)$$

Підставляючи розв'язки (9) у функціонал (10) і використовуючи необхідну умову мінімуму

$$\frac{\partial J(F_0)}{\partial b_{k_1}^{(m)}} = 0, \quad k_1 = 1, 2, \dots, q_1,$$

$$\frac{\partial J(F_0)}{\partial b_{k_2}^{*(m)}} = 0, \quad k_2 = 1, 2, \dots, q_2,$$

зводимо проблему пошуку розв'язків системи алгебраїчних рівнянь щодо невідомих $b_k^{(m)} = \{\{b_k^{(m)}\}, \{b_k^{*(m)}\}\}$ до системи Рітца

$$\sum_{i,j=1}^q \alpha_{ij}^{(m)} b_j^{(m)} = \gamma_i^{(m)}, \quad (12)$$

$\{\alpha_{ij}^{(m)}\}$ — симетрична невід'ємно визначена матриця з елементами [1]

$$\alpha_{ij}^{(m)} = \int_Q \left(\nabla \mathcal{W}_{i+m-1,l}^{(m)}, \nabla \mathcal{V}_{j+m-1,l}^{(m)} \right) dQ, \quad (13)$$

а $\{\gamma_i^{(m)}\}$ — q -вимірний вектор довжини $q = q_1 + q_2$ з елементами

$$\gamma_i^{(m)} = \int_Q \mathfrak{g} \mathcal{W}_{i+m-1,l}^{(m)} dS. \quad (14)$$

Внаслідок того, що наближені розв'язки $F_0(X, \xi)$ мають вигляд (9), $\{\alpha_{ij}^{(m)}\}$ і $\{\gamma_{ij}^{(m)}\}$ набувають вигляду

$$\alpha_{ij}^{(m)} = \begin{pmatrix} \alpha_{ij1}^{(m)} & \alpha_{ij2}^{(m)} \\ \alpha_{ij3}^{(m)} & \alpha_{ij4}^{(m)} \end{pmatrix}, \quad \gamma_i^{(m)} = \begin{pmatrix} \gamma_{i1}^{(m)} \\ \gamma_{i2}^{(m)} \end{pmatrix}.$$

Елементи матриці $\{\alpha_{ij}^{(m)}\}$ тоді виглядають так:

$$\begin{aligned} \alpha_{ijl}^{(m)} = & \int_{R-r_0}^{R+r_0} \left(\xi \frac{\partial \mathcal{W}_{i+m-1,l}^{(m)}}{\partial X} \mathcal{V}_{j+m-1,l}^{(m)} \right)_{X=0} d\xi \\ & + \int_{-H}^0 \left(\xi \left(\frac{\partial \mathcal{W}_{i+m-1,l}^{(m)}}{\partial \xi} + \varsigma(X) \frac{\partial \mathcal{W}_{i+m-1,l}^{(m)}}{\partial X} \right) \mathcal{V}_{j+m-1,l}^{(m)} \right)_{\xi=\zeta_+(X)} dX \\ & + \int_{-H}^0 \left(\xi \left(-\frac{\partial \mathcal{W}_{i+m-1,l}^{(m)}}{\partial \xi} + \varsigma(X) \frac{\partial \mathcal{W}_{i+m-1,l}^{(m)}}{\partial X} \right) \mathcal{V}_{j+m-1,l}^{(m)} \right)_{\xi=\zeta_-(X)} dX. \end{aligned}$$

Елементи правої частини $\{\gamma_i^{(m)}\}$ обчислюються за формулами

$$\begin{aligned} \gamma_{il}^{(m)} = & \int_{R-r_0}^{R+r_0} \left(\xi^2 \mathcal{W}_{i+m-1,l}^{(m)} \right)_{X=0} d\xi \\ & + \int_{-h}^0 \left(\xi (-\varrho_-(X, \xi)) \mathcal{W}_{i+m-1,l}^{(m)} \right)_{\xi=\zeta_+(X)} dX \\ & + \int_{-r-h}^{-h} \left(\xi \varrho_+(X, \xi) \mathcal{W}_{i+m-1,l}^{(m)} \right)_{\xi=\zeta_+(X)} dX \\ & + \int_{-r-h}^{-h} \left(\xi \varrho_-(X, \xi) \mathcal{W}_{i+m-1,l}^{(m)} \right)_{\xi=\zeta_-(X)} dX \\ & + \int_{-h}^0 \left(\xi \varrho_+(X, \xi) \mathcal{W}_{i+m-1,l}^{(m)} \right)_{\xi=\zeta_-(X)} dX \end{aligned}$$

при

$$\varsigma(X) = \frac{(X+h)}{\sqrt{r^2 - (X+h)^2}}, \quad \varrho_{\pm}(X, \xi) = (X \cos \alpha_0 \pm \xi \sin \alpha_0),$$

функції $\mathcal{W}_{i+m-1,l}^{(m)}$ і $\mathcal{V}_{i+m-1,l}^{(m)}$ складаються з базисних пар $w_{i+m-1,l}^{(m)}$ чи $w_{i+m-1,l}^{*(m)}$ (див. детально [1]) для матриці

$$(\mathcal{W}_{i+m-1,l}, \mathcal{V}_{j+m-1,l}) = \begin{cases} \left(w_{i+m-1}^{(m)}, w_{j+m-1}^{(m)} \right) & \text{при } l = 1, \\ \left(w_{i+m-1}^{(m)}, w_{j+m-1}^{*(m)} \right) & \text{при } l = 2, \\ \left(w_{i+m-1}^{*(m)}, w_{j+m-1}^{(m)} \right) & \text{при } l = 3, \\ \left(w_{i+m-1}^{*(m)}, w_{j+m-1}^{*(m)} \right) & \text{при } l = 4 \end{cases}$$

і для вектора

$$\mathcal{W}_{i+m-1,l} = \begin{cases} w_{i+m-1}^{(m)} & \text{при } l = 1, \\ w_{i+m-1}^{*(m)} & \text{при } l = 2. \end{cases}$$

Нашою метою є визначення елементів тензора інерції рідини $\mathbf{J}_0^1$. Використовуючи розв'язки системи Рітца (12), можна побачити, що елементи тензора інерції рідини $\mathbf{J}_0^1$ (6) щодо початку координат O в системі, пов'язаній з поверхнею, можна у термінах функцій $F_0(X, \xi)$ записати так:

$$\mathbf{J}_{0ij}^1 = \pi \rho \int_{S_0 + \Sigma_0} F_{0i} \frac{\partial F_{0j}}{\partial \nu} dS = \pi \rho \sum_{k=1}^q b_k^{(m)} \gamma_k^{(m)}. \quad (15)$$

3. Збіжність. Оскільки задача Неймана розв'язується з точністю до множника, нам необхідно ввести нормування на розв'язок $F_0(X, \xi)$ на незбуреній вільній поверхні при обчисленні елементів тензора інерції рідини $\mathbf{J}_0^1$. Нормуючий множник вибираємо з умови $\|F_0(0, r_0)\| = 1$. Тоді розв'язок $F_0(X, \xi)$ набуває вигляду

$$F_0(X, \xi) = \sum_{k=1}^{q_1} \frac{b_k^{(m)}}{\|F_0(0, r_0)\|} w_{k+m-1}^{(m)}(X, \xi) + \sum_{k=1}^{q_2} \frac{b_k^{*(m)}}{\|F_0(0, r_0)\|} w_{k+m-1}^{*(m)}(X, \xi).$$

Точність наближення потенціалів Стокса–Жуковського у слабкому, інтегральному, сенсі можна оцінити по тому, як точно ми наближаємо тензор інерції (15). Таблиця 1 демонструє типову збіжність $\mathbf{J}_{022}^1$ для різних глибин заповнення рідини при фіксованому радіусі твірної тора, рівному 1 для $m = 1$. Для практичної демонстрації використовуємо таку геометрію: $r = 1$, $R = 2$. Як можна побачити з табл. 1, вже 15 пар базових функцій гарантують інженерну точність знаходження тензора інерції рідини. Систематичний аналіз збіжності всього спектра глибин заповнення показує аналогічну збіжність. Збіжність уповільнюється лише тоді, коли максимальна глибина рідини значно перевищує лінійний розмір вільної поверхні. Це ситуація, близька до повного заповнення порожнини. В цих точках повільніше збігаються й власні частоти та спостерігається незначний розбіг із експериментом [10]. Для покращення точності визначення тензора інерції рідини необхідно збільшувати кількість базисних функцій. Однак підвищення точності навіть удвічі для такого базису призводить до значного підвищення затрат ресурсу машинного обчислення, а отже, й затраченого часу. Для уникнення таких ситуацій в подальшому планується впровадити базис, який буде точно задовольняти крайові умови на стінках порожнини для дослідження нелінійних коливань рідини в тороїдальних баках.

Таблиця 1. Збіжність $\mathbf{J}_{022}^1$ для тора з геометрією $r = 1$, $R = 2$ щодо безрозмірної глибини $\bar{H} = H/2r$ для $m = 1$

q	$\bar{H} = 1/6$	$\bar{H} = 1/3$	$\bar{H} = 1/2$	$\bar{H} = 2/3$	$\bar{H} = 5/6$
2	5.610063	15.058098	25.407712	35.757325	45.205360
4	5.943396	15.391432	25.741045	36.090658	45.538694
6	6.010063	15.458098	25.807712	36.157325	45.605360
8	6.060063	15.508098	25.857712	36.207325	45.655360
10	6.076730	15.524765	25.874378	36.223991	45.672027
12	6.085063	15.533098	25.882712	36.232325	45.680360
14	6.090063	15.538098	25.887712	36.237325	45.685360
16	6.095777	15.543813	25.893426	36.243039	45.691074
18	6.098952	15.546987	25.896600	36.246214	45.694249
20	6.100972	15.549007	25.898621	36.248234	45.696269
22	6.102371	15.550406	25.900019	36.249632	45.697668
24	6.103396	15.551432	25.901045	36.250658	45.698694
26	6.104181	15.552216	25.901829	36.251442	45.699478
28	6.104800	15.552835	25.902448	36.252062	45.700097
30	6.105301	15.553336	25.902950	36.252563	45.700598

4. Про тензор інерції “замороженої” рідини. Крім повністю заповненої рідиною порожнини деякий порівняльний інтерес представляє також порожнина із “замороженою” рідиною. Вона поводить як тверде тіло, компоненти її тензора інерції ми позначаємо через $\mathbf{J}_{ij}^0$ і обчислюємо, як і елементи тензора інерції твердого тіла, за формулами (7), інтегруючи за об’ємом рідини Q при $\rho_s = 1$, а тензор інерції рідини $\mathbf{J}_0^1$ визначаємо із формули (15). Дослідимо такі безрозмірені залежності тензорів інерції рідини $\bar{\mathbf{J}}_{022}^1 = \mathbf{J}_{022}^1 / \rho r_0^5$ і $\bar{\mathbf{J}}_{022}^0 = \mathbf{J}_{022}^0 / \rho r_0^5$ щодо геометричних параметрів системи. Тензор інерції замороженої рідини $\mathbf{J}_{022}^0$ повного тора визначаємо за відомими формулами

$$\mathbf{J}_{022}^0 = \rho \int_{Q_0} (x^2 + z^2) dQ = (2\pi^2 r^2 R \rho) \left(\frac{5}{8} r^2 + \frac{1}{2} R^2 \right),$$

а безрозмірний тензор інерції замороженої рідини частково заповненого тора — за формулою

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{J}}_{022}^{(1)} = & \frac{1}{8} \pi \frac{R}{r} \left(5 + 4 \frac{R^2}{r^2} \right) \left(\pi + 2 \arcsin \left(\frac{h}{r} \right) \right) \\ & + \frac{1}{4} \pi \frac{R}{r} \frac{h}{r} \sqrt{1 - \frac{h^2}{r^2}} \left(3 + 4 \frac{R^2}{r^2} + 2 \frac{h^2}{r^2} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

З рис. 2 видно, що при збільшенні глибини від нуля до заповненого тора величина $\bar{\mathbf{J}}_{022}^1$ збільшується від нуля до деякого фіксованого значення $\hat{\mathbf{J}}_{022}^1$, а величина тензора інерції звичайної рідини менша за тензор інерції “замороженої” рідини. Згідно з

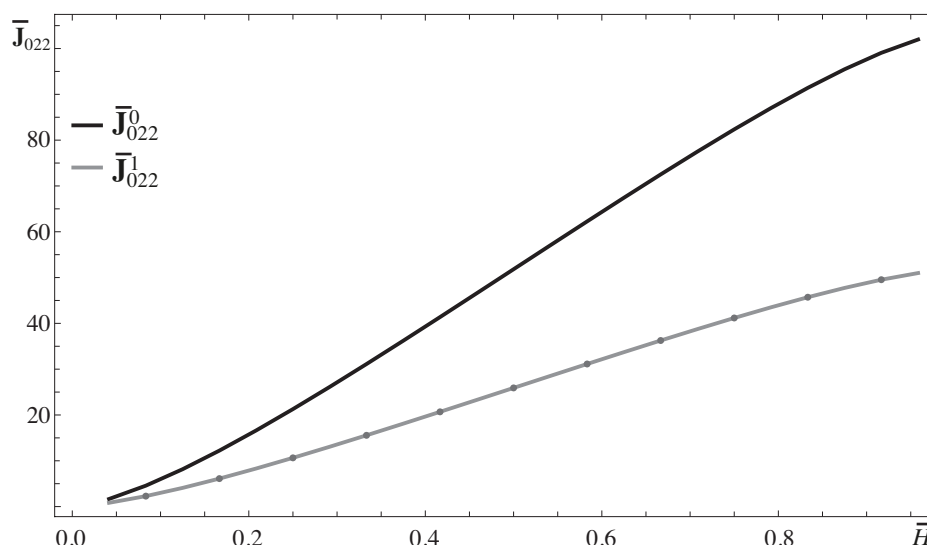


Рис. 2. Залежність безрозмірної компоненти тензора інерції рідини $\bar{J}_{022}$ від безрозмірної глибини заповнення $\bar{H}$ (суцільна чорна лінія — “заморожена” рідина, а сіра лінія — звичайна рідина).

обчисленнями встановлено, що ця пропорція складає приблизно дві одиниці, тобто тензор інерції звичайної рідини удвічі менший від “замороженої” рідини. Глибина тут знерозмірювалася діаметром внутрішньої частини тора за допомогою співвідношення $\bar{H} = H/2r$.

Висновки. Побудовано наближено аналітичні потенціали Стокса–Жуковського як розв’язки крайової задачі Неймана для областей, утворених зрізаними горизонтальними тороїдальними порожнинами. Для їхнього визначення використано варіаційний метод і гармонійний базис поліноміального вигляду, які дозволяють отримати розв’язки в аналітичному вигляді. Показано, що метод застосовується для широкого спектру глибин тороїдальних порожнин. Показано, що для знаходження потенціалу Стокса–Жуковського, як і тензора інерції рідини, з інженерною точністю достатньо невеликої кількості базових функцій. Результати добре узгоджуються з подібними роботами. Підтверджено, що величина тензора інерції вільної рідини менша за тензор інерції “замороженої” рідини. Результати роботи передбачається використати для розробки нелінійної модальної теорії для тороїдального бака.

Автор заявляє про відсутність конфлікту інтересів. Усі необхідні дані містяться в статті. Роботу виконано за часткової фінансової підтримки за проектом НФДУ № 2020.01/0089.

Література

1. А. В. Солодун, *Собственные колебания жидкости в тороидальных баках*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **16**, № 2, 140–155 (2019).
2. И. А. Луковский, *Математические модели нелинейной динамики твердых тел с жидкостью*, Наук. думка, Киев (2010).
3. О. М. Faltinsen, A. N. Timokha, *Cambridge university press* (2009).
4. І. О. Луковский, О. В. Солодун, О. М. Тимоха, *Математичні проблеми нелінійної динаміки конічних резервуарів з рідиною*, Наук. думка, Киев (2019).
5. И. А. Луковский, В. А. Троценко, С. Ф. Фещенко, *Расчет динамических характеристик жидкости в подвижных полостях*, Ин-т математики АН УССР, Киев (1968).

6. И. А. Луковский, М. Я. Барняк, А. Н. Комаренко, *Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости*, Наук. думка, Киев (1984).
7. И. А. Луковский, А. В. Солодун, А. Н. Тимоха, *О потенциале Стокса–Жуковского для полости в виде усеченного конуса*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **5**, № 2, 18–34 (2008).
8. И. А. Луковский, А. В. Солодун, *Вариационный метод исследования спектральной задачи о собственных колебаниях жидкости в соосных конических резервуарах*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **10**, № 3, 88–112 (2013).
9. А. В. Солодун, *Собственные колебания жидкости в усеченных соосных конических баках*, Зб. праць Ін-ту математики НАН України, **15**, № 1, 180–205 (2018).
10. J. L. Mc. Carty, H. W. Leonard, W. C. Walton, *Experimental investigation of the natural frequencies of liquids in toroidal tanks*, Langley Research Center, Langley Field, Va., NASA TN D-531 (1960).

Одержано 01.03.24,
після доопрацювання — 12.04.24