

СЛАБКО НЕЛІНІЙНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ДЛЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ФРЕДГОЛЬМА З ВИРОДЖЕНИМ ЯДРОМ У БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

Валерій Журавльов, Наталія Гонгало, Ірина Слюсаренко

Поліський національний університет

Старий 6-р, 7, Житомир, 10008, Україна

e-mail: vfz2008@ukr.net, відповідальний за листування,

nataliiahonhalo@gmail.com,

islusarenko62@gmail.com

We consider weakly nonlinear boundary-value problems for Fredholm integro-differential equations with a degenerate kernel in Banach spaces. We obtain necessary and sufficient conditions for the existence of solutions of these problems and propose a convergent iterative procedure for construction of at least one solution.

Розглянуто слабко нелінійні крайові задачі для інтегро-диференціальних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у банахових просторах. Отримано необхідні та достатні умови існування розв'язків таких задач, запропоновано збіжну ітераційну процедуру для побудови принаймні одного розв'язку.

Дослідження слабко нелінійних крайових задач для операторних рівнянь різних типів у банахових просторах

$$\begin{aligned}(Lz)(t) &= f(t) + \varepsilon Z(z, t, \varepsilon), \\ \ell z(\cdot, \varepsilon) &= \alpha + \varepsilon J(z, \varepsilon)\end{aligned}\tag{1}$$

з узагальнено оборотними операторами L у лінійній частині є нетривіальною проблемою. Труднощі полягають у тому, що як вихідне лінійне рівняння $(Lz)(t) = f(t)$, так і породжуюча лінійна крайова задача (1) при $\varepsilon = 0$ не є всюди розв'язними [1, 2].

Слабко нелінійні крайові задачі у періодичному випадку для систем звичайних диференціальних рівнянь у скінченновимірних просторах досліджено в [3], крайові задачі для систем звичайних диференціальних рівнянь і систем функціонально-диференціальних рівнянь із імпульсним впливом у загальному нетеровому випадку — в [4–6], а в [7] — слабко нелінійні системи інтегро-диференціальних рівнянь.

Останнім часом слабко нелінійні крайові задачі (1) вивчають і у банахових просторах. Так, у [8] досліджено слабко нелінійні крайові задачі (1) для випадку, коли L — звичайний диференціальний оператор, який діє у банаховому просторі, а у [9] розглянуто умови існування періодичних розв'язків диференціальних і різницевих рівнянь у банаховому просторі обмежених числових послідовностей. У [10] вивчено задачу (1) у випадку, коли

L — інтегральний не всюди розв'язний оператор Фредгольма з виродженим ядром. У загальному вигляді крайову задачу (1) досліджено в [11].

Дослідження слабко нелінійних крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь у банахових просторах авторам не відомі.

Постановка задачі. Позначимо через $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ дійсні банахові простори. Нехай $z(t)$ — вектор-функція, яка діє з відрізка $\mathcal{I} = [a, b]$ у банаховий простір $\mathbf{B}_2$, $z(t) \in \mathbf{C}^1(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, $\dot{z}(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, де $\mathbf{C}^1(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ — банаховий простір неперервно диференційовних вектор-функцій з нормою $\|z\| = \sum_{k=0}^1 \sup_{t \in \mathcal{I}} \|z^{(k)}(t)\|_{\mathbf{B}_2}$, де $z^{(k)}(t)$ — k -та похідна від $z(t)$. Похідну $\dot{z}(t)$ розуміємо в сенсі [12, с. 140], $\mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ — банаховий простір неперервних на $\mathcal{I}$ вектор-функцій, $\mathbf{C}(\mathcal{I}_{\varepsilon_0})$ — простір неперервних по $\varepsilon \in \mathcal{I}_{\varepsilon_0} = [0, \varepsilon_0]$ вектор-функцій.

Розглянемо слабконелінійну крайову задачу для інтегро-диференціального рівняння Фредгольма з малим параметром ε :

$$\dot{z}(t) - \int_a^b [P(t)W(s)z(s) + Q(t)V(s)\dot{z}(s)] ds = f(t) + \varepsilon Z(z(t, \varepsilon), \dot{z}(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \quad (2)$$

$$\ell z(\cdot) = \alpha + \varepsilon J(z(\cdot), \dot{z}(\cdot), \varepsilon), \quad (3)$$

де

(a1) оператор-функції $P(t)$ і $Q(t)$ діють із $\mathbf{B}_1$ у $\mathbf{B}_2$, сильно неперервні з нормами $\|P\| = \sup_{t \in \mathcal{I}} \|P(t)\|_{\mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_2} < \infty$ і $\|Q\| = \sup_{t \in \mathcal{I}} \|Q(t)\|_{\mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_2} < \infty$, а оператор-функції $W(t)$ і $V(t)$ діють із $\mathbf{B}_2$ у $\mathbf{B}_1$, сильно неперервні з нормами $\|W\| = \sup_{t \in \mathcal{I}} \|W(t)\|_{\mathbf{B}_2 \rightarrow \mathbf{B}_1} < \infty$ і $\|V\| = \sup_{t \in \mathcal{I}} \|V(t)\|_{\mathbf{B}_2 \rightarrow \mathbf{B}_1} < \infty$;

(a2) $Z(z, \dot{z}, t, \varepsilon)$ — нелінійна по z і $\dot{z}$ обмежена оператор-функція, яка в околі породжувачого розв'язку $\|z - z_0\| \leq q$, $\|\dot{z} - \dot{z}_0\| \leq q_1$ має сильні неперервні похідні Фреше по z і $\dot{z}$ та неперервна за сукупністю змінних $z, \dot{z}, t, \varepsilon, \varepsilon \in \mathcal{I}_{\varepsilon_0}$; q і ε_0 — досить малі константи;

$$(a3) \quad Z(0, 0, t, 0) = 0, \quad Z'_z(0, 0, t, 0) = 0, \quad Z'_{\dot{z}}(0, 0, t, 0) = 0; \quad (4)$$

(a4) $\ell: \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2) \rightarrow \mathbf{B}$ — лінійний обмежений вектор-функціонал;

(a5) $J(z, \dot{z}, \varepsilon)$ — нелінійний по z і $\dot{z}$ обмежений вектор-функціонал, який в околі породжувачого розв'язку $\|z - z_0\| \leq q$, $\|\dot{z} - \dot{z}_0\| \leq q_1$ має сильні неперервні похідні Фреше по z і $\dot{z}$ та неперервний за сукупністю змінних $z, \dot{z}, \varepsilon, \varepsilon \in \mathcal{I}_{\varepsilon_0}$;

$$(a6) \quad J(0, 0, 0) = 0, \quad J'_z(0, 0, 0) = 0, \quad J'_{\dot{z}}(0, 0, 0) = 0;$$

(a7) вектор-функція $f(t) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ визначена на проміжку $\mathcal{I}$ зі значеннями у банаховому просторі $\mathbf{B}_2$ з нормою $\|f\| = \sup_{t \in \mathcal{I}} \|f(t)\|_{\mathbf{B}_2}$, $\alpha \in \mathbf{B}$.

Мета цієї роботи полягає в наступному: застосовуючи конструкції узагальнено-обернених операторів L^- до інтегральних [13] та інтегро-диференціальних [14] у банахових просторах, а також теореми про розв'язність крайових задач для операторних рівнянь із узагальнено оборотними операторами L , знайти умови існування та алгоритм побудови загального розв'язку $z(t, \varepsilon)$ крайової задачі (2), (3), який належить простору $\mathbf{C}^1(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$ по t , простору $\mathbf{C}(\mathcal{I}_{\varepsilon_0})$ по ε і обертається при $\varepsilon = 0$ в один із розв'язків породжувачої крайової задачі

$$\dot{z}_0(t) - \int_a^b [P(t)W(s)z_0(s) + Q(t)V(s)\dot{z}_0(s)] ds = f(t), \quad (5)$$

$$\ell z_0(\cdot) = \alpha. \quad (6)$$

Такий підхід продовжує розвиток методів теорії збурень і методу малого параметра Ляпунова – Пуанкаре [15], розвинутий київською школою нелінійної механіки, основи якої закладено у роботах [16, 17].

Задачу будемо розв'язувати шляхом переходу за допомогою методів типу Ляпунова – Шмідта від крайової задачі (2), (3) до операторної системи, для якої застосовні збіжні ітераційні процедури, засновані на принципі нерухомої точки [3–5]. Інтервал збіжності ітераційних процедур може бути встановлений за допомогою мажорант Ляпунова [15], які успішно було застосовано для періодичних крайових задач [3] і загальних нетерових крайових задач [4, 5].

Попередні відомості. Використовуючи позначення та методику з [18, 19], заміною $\dot{z}(t) = y(t)$, $z(t) = \int_a^t y(s) ds + c_2$, $c_2 \in \mathbf{B}_2$, рівняння (5) зводимо до інтегрального рівняння

$$(L_1 y)(t) := y(t) - M(t) \int_s^b N(s) y(s) ds = g(t), \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned} M(t) &= [P(t), \quad Q(t)], \quad N(s) = \text{col} [\widetilde{W}(s), \quad V(s)], \\ g(t) &= f(t) + P(t) W c_2, \quad \widetilde{W}(s) = \int_s^b W(\tau) d\tau, \quad W = \widetilde{W}(a). \end{aligned} \quad (8)$$

Нехай оператор $D = I_{\mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1} - \int_a^b N(s) M(s) ds$ узагальнено оборотний. Тоді при виконанні умови

$$\mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) g(s) ds = \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) [f(s) + P(s) W c_2] ds = 0$$

і лише при її виконанні [13], інтегральне рівняння (7) має сім'ю розв'язків

$$y(t) = M(t) \mathcal{P}_{N(D)} \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_1 \end{bmatrix} + (L_1^- g)(t) = \overline{X}_1(t) \hat{c}_1 + (L_1^- g)(t), \quad (9)$$

де $\mathcal{P}_{Y_D} : \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1 \rightarrow Y_D$ і $\mathcal{P}_{N(D)} : \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1 \rightarrow N(D)$ — обмежені проєктори на підпростір $Y_D = \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1 \ominus R(D)$ і нуль-простір $N(D)$, $\overline{X}_1(t) \hat{c}_1 = M(t) \mathcal{P}_{N(D)} \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_1 \end{bmatrix}$, $\hat{c}_1$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{B}_1$, L_1^- — узагальнено обернений оператор до інтегрального оператора L_1 [13]

$$(L_1^- g)(t) = g(t) + M(t) D^- \int_a^b N(s) g(s) ds,$$

D^- — обмежений узагальнено обернений оператор до оператора D [20].

Далі клас обмежених узагальнено оборотних операторів, які діють із банахового простору $\mathbf{X}$ у банаховий простір $\mathbf{Y}$, будемо позначати $\mathbf{GI}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ (*generalized inverse*).

Позначивши

$$S = \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s)P(s)W ds, \quad S: \mathbf{B}_2 \rightarrow \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1,$$

$$f_0 = -\mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s)f(s)ds, \quad f_0 \in \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1,$$

отримаємо рівняння

$$Sc_2 = f \quad (10)$$

щодо елемента c_2 , при якому інтегральне рівняння (7) буде розв'язним.

Нехай оператор $S \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1)$ узагальнено оборотний. Тоді при виконанні умови [19]

$$\mathcal{P}_{Y_S} \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s)f(s) ds = 0 \quad (11)$$

і лише при її виконанні, з (10) одержимо

$$c_2 = \mathcal{P}_{N(S)} \hat{c}_2 + S^- f_0, \quad (12)$$

де $\mathcal{P}_{N(S)}: \mathbf{B}_2 \rightarrow N(S)$, $\mathcal{P}_{Y_S}: \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1 \rightarrow Y_S$ — обмежені проєктори, $\hat{c}_2$ — довільний елемент банахового простору $\mathbf{B}_2$, $S^-: \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_2$ — обмежений узагальнено обернений оператор до оператора S [21, с. 538].

Підставивши $g(s)$ із (8) у розв'язок (9) інтегрального рівняння (7) і врахувавши (12), здобудемо загальний розв'язок породжуючого інтегро-диференціального рівняння (5):

$$z_0(t, \hat{c}_1, \hat{c}_2) = \begin{bmatrix} \tilde{X}_1(t), & \tilde{X}_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix} + (L^- f)(t), \quad (13)$$

де

$$\tilde{X}_1(t) = \int_a^t \bar{X}_1(s) ds, \quad \tilde{X}_2(t) = (\tilde{L}_1^- P)(t)W \mathcal{P}_{N(S)} + \mathcal{P}_{N(S)},$$

$$(\tilde{L}_1^- f)(t) = \int_a^t (L_1^- f)(s) ds, \quad (\tilde{L}_1^- P)(t) = \int_a^t (L_1^- P)(s) ds,$$

$$(L^- f)(t) = (\tilde{L}_1^- f)(t) - \left[(\tilde{L}_1^- P)(t)W + I_{\mathbf{B}_2} \right] S^- \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s)f(s) ds$$

— узагальнено обернений оператор до інтегро-диференціального оператора L [14], $\hat{c}_i$ — довільні елементи банахових просторів $\mathbf{B}_i$, $i = 1, 2$.

Таким чином, для породжуючого інтегро-диференціального рівняння (5) справедлива така теорема.

Теорема 1 [19]. Нехай оператори $D \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1)$ і $S \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1)$ узагальнено оборотні.

Інтегро-диференціальне рівняння (5) має розв'язки тоді і лише тоді, коли $f(t) \in \mathbf{C}([a, b], \mathbf{B}_2)$ задовольняє умову (11), при виконанні якої воно має сім'ю розв'язків (13).

Крайові задачі у банахових просторах. Далі розглянемо породжуючу крайову задачу (5), (6).

Підставивши розв'язок (13) у крайову умову (6), отримаємо операторне рівняння щодо довільних сталих $\hat{c}_1 \in \mathbf{B}_1$, $\hat{c}_2 \in \mathbf{B}_2$:

$$\begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix} = \alpha - \ell(L^- f)(\cdot), \quad (14)$$

де $Q_1 = \ell \tilde{X}_1(\cdot)$, $Q_2 = \ell \tilde{X}_2(\cdot)$ — лінійні обмежені оператори.

Відомо [21], що операторна матриця $Q = \begin{bmatrix} Q_1 & Q_2 \end{bmatrix}$ має обмежену узагальнено обернену тоді і лише тоді, коли й узагальнено оборотні оператори Q_1 і $\hat{Q}_2 = \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} Q_2$.

Нехай оператори Q_1 і $\hat{Q}_2$ узагальнено оборотні. Наслідком узагальненої оборотності оператора Q є нормальна розв'язність операторного рівняння (14).

Використовуючи теорему 3 з [21, с. 545] про розв'язність рівняння з операторною матрицею Q , маємо, що рівняння (14) розв'язне тоді й лише тоді, коли виконується умова [20, 21]

$$\mathcal{P}_{Y_Q} [\alpha - \ell(L^- f)(\cdot)] = 0,$$

за виконання якої рівняння (14) має сім'ю розв'язків

$$\begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix} = \mathcal{P}_{N(Q)} \begin{bmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \end{bmatrix} + Q^- [\alpha - \ell(L^- f)(\cdot)], \quad (15)$$

де

$$\mathcal{P}_{Y_Q} = \mathcal{P}_{Y_{\hat{Q}_2}} \mathcal{P}_{Y_{Q_1}}, \quad \mathcal{P}_{N(Q)} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{N(Q_1)} & -Q_1^- Q_2 \mathcal{P}_{N(\hat{Q}_2)} \\ 0 & \mathcal{P}_{N(\hat{Q}_2)} \end{bmatrix},$$

$$Q^- = \begin{bmatrix} Q_1^- - Q_1^- Q_2 \hat{Q}_2^- \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \\ \hat{Q}_2^- \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \end{bmatrix}.$$

Для скорочення записів позначимо

$$\tilde{\mathcal{P}}_2 = -Q_1^- Q_2 \mathcal{P}_{N(\hat{Q}_2)}, \quad \tilde{Q}_1^- = Q_1^- - Q_1^- Q_2 \hat{Q}_2^- \mathcal{P}_{Y_{Q_1}}, \quad \tilde{Q}_2^- = \hat{Q}_2^- \mathcal{P}_{Y_{Q_1}}.$$

Тоді (15) набуває вигляду

$$\begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{N(Q_1)} & \tilde{\mathcal{P}}_2 \\ 0 & \mathcal{P}_{N(\hat{Q}_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{Q}_1^- \\ \tilde{Q}_2^- \end{bmatrix} [\alpha - \ell(L^- f)(\cdot)], \quad (16)$$

де $\tilde{c}_1 \in \mathbf{B}_1$, $\tilde{c}_2 \in \mathbf{B}_2$ — довільні сталі.

Підставивши знайдені $\hat{c}_1$ і $\hat{c}_2$ із (16) у (12), отримаємо загальний розв'язок крайової задачі (5), (6):

$$z_0(t) = \begin{bmatrix} \tilde{X}_1(t), & \tilde{X}_2(t) \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{N(Q_1)} & \tilde{\mathcal{P}}_2 \\ 0 & \mathcal{P}_{N(\hat{Q}_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{Q}_1^- \\ \tilde{Q}_2^- \end{bmatrix} [\alpha - \ell(L^- f)(\cdot)] \right\} + (L^- f)(t).$$

Після перетворень і перепозначень довільних сталих $\tilde{c}_1 = \hat{c}_1 \in \mathbf{B}_1$ і $\tilde{c}_2 = \hat{c}_2 \in \mathbf{B}_2$ одержимо загальний розв'язок породжуючої крайової задачі (5), (6):

$$z_0(t, \hat{c}_1, \hat{c}_2) = \begin{bmatrix} \tilde{X}_1(t)\mathcal{P}_{N(Q_1)}, & \tilde{X}_1(t)\tilde{\mathcal{P}}_2 + \tilde{X}_2(t)\mathcal{P}_{N(\hat{Q}_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix} + (L^- f)(t) - \begin{bmatrix} \tilde{X}_1(t)\tilde{Q}_1^- + \tilde{X}_2(t)\tilde{Q}_2^- \end{bmatrix} \ell L^- f(\cdot) + \begin{bmatrix} \tilde{X}_1(t)\tilde{Q}_1^- + \tilde{X}_2(t)\tilde{Q}_2^- \end{bmatrix} \alpha$$

або

$$z_0(t, \hat{c}_1, \hat{c}_2) = \begin{bmatrix} X_1(t), & X_2(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix} + G[f](t) + \begin{bmatrix} \tilde{X}_1(t)\tilde{Q}_1^- + \tilde{X}_2(t)\tilde{Q}_2^- \end{bmatrix} \alpha,$$

де

$$\begin{aligned} X_1(t) &= \tilde{X}_1(t)\mathcal{P}_{N(Q_1)}, & X_2(t) &= \tilde{X}_1(t)\tilde{\mathcal{P}}_2 + \tilde{X}_2(t)\mathcal{P}_{N(\hat{Q}_2)}, \\ G[f](t) &= (L^- f)(t) - \begin{bmatrix} \tilde{X}_1(t)\tilde{Q}_1^- + \tilde{X}_2(t)\tilde{Q}_2^- \end{bmatrix} \ell L^- f(\cdot) \end{aligned} \quad (17)$$

— узагальнений оператор Гріна.

Теорема 2. Нехай оператори $D \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1, \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1)$, $S \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_2, \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_1)$, $Q_1 \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1, \mathbf{B})$ і $\hat{Q}_2 \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_2, \mathbf{B})$ узагальнено оборотні.

Тоді неоднорідна породжуюча крайова задача (5), (6) має розв'язки для тих і лише тих $f(t) \in \mathbf{C}([a, b], \mathbf{B}_2)$ і $\alpha \in \mathbf{B}$, які задовольняють систему умов

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{Y_S} \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) f(s) ds = 0, \\ \mathcal{P}_{Y_{\hat{Q}_2}} \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \{\alpha - \ell(L^- f)(\cdot)\} = 0, \end{cases} \quad (18)$$

при виконанні яких крайова задача (5), (6) має сім'ю розв'язків

$$z_0(t, \hat{c}_1, \hat{c}_2) = X(t) \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix} + G[f](t) + \begin{bmatrix} \tilde{X}_1(t)\tilde{Q}_1^- + \tilde{X}_2(t)\tilde{Q}_2^- \end{bmatrix} \alpha, \quad (19)$$

де $X(t) = [X_1(t), X_2(t)]$, $G[f](t)$ — узагальнений оператор Гріна (17).

Основний результат. Розглянемо крайову задачу (2), (3) у випадку, коли породжуюча крайова задача (5), (6) неоднозначно розв'язна.

1. Необхідна умова існування розв'язку слабконелінійної крайової задачі для інтегро-диференціального рівняння Фредгольма з виродженням ядром. Нехай функція $f(t) \in \mathbf{C}([a, b], \mathbf{B}_2)$ і константа $\alpha \in \mathbf{B}$ такі, що система умов (18) виконується.

Теорема 3. Нехай слабконелінійна крайова задача (2), (3) має розв'язок $z = z(t, \varepsilon) : z(\cdot, \varepsilon) \in \mathbf{C}^1(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, $z(t, \cdot) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}_{\varepsilon_0})$, який при $\varepsilon = 0$ обертається у породжуючий розв'язок (19) із елементами $\hat{c}_1 = c_{01} \in \mathbf{B}_1$ і $\hat{c}_2 = c_{02} \in \mathbf{B}_2$. Тоді елементи c_{01} і c_{02} обов'язково повинні бути дійсними коренями системи рівнянь

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{Y_S} \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) Z(z_0(s, c_{01}, c_{02}), \dot{z}_0(s, c_{01}, c_{02}), s, 0) ds = 0, \\ \mathcal{P}_{Y_{\hat{Q}_2}} \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} [J(z_0(\cdot, c_{01}, c_{02}), \dot{z}_0(\cdot, c_{01}, c_{02}), 0) - \ell L^- Z(z_0(\cdot, c_{01}, c_{02}), \dot{z}_0(\cdot, c_{01}, c_{02}), \cdot, 0)] = 0. \end{cases}$$

Доведення. Нехай виконуються умови (4). Тоді при всіх $\varepsilon \in \mathcal{I}_{\varepsilon_0}$ справедливі тотожності

$$\dot{z}(t) - \int_a^b [P(t)W(s)z(s) + Q(t)V(s)\dot{z}(s)] ds \equiv f(t) + \varepsilon Z(z(t, \varepsilon), \dot{z}(t, \varepsilon), t, \varepsilon),$$

$$\ell z(\cdot) \equiv \alpha + \varepsilon J(z(\cdot, \varepsilon), \dot{z}(\cdot, \varepsilon), \varepsilon).$$

За теоремою 2 та з огляду на справедливість умов (18) для цієї крайової задачі отримаємо, що при всіх $\varepsilon \in \mathcal{I}_{\varepsilon_0}$, $\varepsilon \neq 0$ нелінійні оператор $Z(z(t, \varepsilon), \dot{z}(t, \varepsilon), t, \varepsilon)$ і функціонал $J(z(\cdot, \varepsilon), \dot{z}(\cdot, \varepsilon), \varepsilon)$ задовольняють систему умов

$$\begin{cases} \mathcal{P}_{Y_S} \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) Z(z(s, \varepsilon), \dot{z}(s, \varepsilon), s, \varepsilon) ds = 0, \\ \mathcal{P}_{Y_{\hat{Q}_2}} \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} [J(z(\cdot, \varepsilon), \dot{z}(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \ell L^- Z(z(\cdot, \varepsilon), \dot{z}(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon)] = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Враховуючи неперервність нелінійної оператор-функції $Z(z, \dot{z}, t, \varepsilon)$ і функціонала $J(z(\cdot), \dot{z}(\cdot), \varepsilon)$ за сукупністю змінних $z, \dot{z}, t, \varepsilon$, при переході до границі при $\varepsilon \rightarrow 0$ отримаємо $z(t, \varepsilon) \rightarrow z_0(t, c_{01}, c_{02})$, а з рівності (20) — необхідну умову існування розв'язку крайової задачі (2), (3):

$$F(c_{01}, c_{02}) = \begin{cases} \mathcal{P}_{Y_S} \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) Z(z_0(s, c_{01}, c_{02}), \dot{z}_0(s, c_{01}, c_{02}), s, 0) ds = 0, \\ \mathcal{P}_{Y_{\hat{Q}_2}} \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} [J(z_0(\cdot, c_{01}, c_{02}), \dot{z}_0(\cdot, c_{01}, c_{02}), 0) - \ell L^- Z(z_0(\cdot, c_{01}, c_{02}), \dot{z}_0(\cdot, c_{01}, c_{02}), \cdot, 0)] = 0, \end{cases} \quad (21)$$

яка доводить теорему.

Будь який розв'язок системи (21) $c_{01} \in \mathbf{B}_1$, $c_{02} \in \mathbf{B}_2$ визначає той породжуючий розв'язок $z_0(t, c_{01}, c_{02})$, якому може відповідати розв'язок $z(t, \varepsilon)$ крайової задачі (2), (3) і який обертається у $z_0(t, c_{01}, c_{02})$ при $\varepsilon = 0$.

Система операторних рівнянь (21) аналогічна до відомого у теорії періодичних нелінійних коливань [3–5] рівняння для породжуючих амплітуд. Тому надалі будемо називати її системою рівнянь для породжуючих елементів крайової задачі (2), (3).

Отже, якщо система рівнянь (21) має розв'язки $c_{01} \in \mathbf{B}_1$ і $c_{02} \in \mathbf{B}_2$, то елементи c_{01} , c_{02} визначають той породжуючий розв'язок $z_0(t, c_{01}, c_{02})$, якому може відповідати розв'язок $z(t, \varepsilon)$ слабо нелінійної крайової задачі (2), (3). Якщо ж система рівнянь (21) не має

розв'язків, то і крайова задача (2), (3) не має шуканого розв'язку. Таким чином, необхідну умову існування розв'язку крайової задачі (2), (3) задовольняє вибір елементів c_{01} і c_{02} у породжуючому розв'язку (19) як дійсних коренів системи рівнянь для породжуючих елементів (21).

2. Достатні умови існування розв'язків. Далі розглянемо достатні умови існування розв'язків слабко нелінійної крайової задачі для інтегро-диференціального рівняння Фредгольма (2), (3) у випадку, коли породжуюча крайова задача (5), (6) має сім'ю розв'язків (19). Для цього виконаємо у крайовій задачі (2), (3) заміну змінної

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t, c_{01}, c_{02}) + x(t, \varepsilon), \quad (22)$$

де $z_0(t, c_{01}, c_{02})$ — породжуючий розв'язок (19) крайової задачі (5), (6), а елементи $c_{01} \in \mathbf{B}_1$ і $c_{02} \in \mathbf{B}_2$ — дійсні корені системи рівнянь для породжуючих елементів (21). Враховуючи нову змінну, будемо шукати умови існування розв'язку $x(t, \varepsilon) : x(\cdot, \varepsilon) \in \mathbf{C}^1(\mathcal{I}, \mathbf{B}_2)$, $x(t, \cdot) \in \mathbf{C}(\mathcal{I}_{\varepsilon_0})$, $x(t, 0) = 0$ крайової задачі

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) - \int_a^b [P(t)W(s)x(s) + Q(t)V(s)\dot{x}(s)] ds \\ = \varepsilon Z(z_0(t, c_{01}, c_{02}) + x(t, \varepsilon), \dot{z}_0(t, c_{01}, c_{02}) + \dot{x}(t, \varepsilon), t, \varepsilon), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\ell z(\cdot) = \alpha + \varepsilon J(z_0(\cdot, c_{01}, c_{02}) + x(\cdot, \varepsilon), \dot{z}_0(\cdot, c_{01}, c_{02}) + \dot{x}(\cdot, \varepsilon), \varepsilon). \quad (24)$$

Використовуючи неперервну диференційовність вектор-функції $Z(z, \dot{z}, t, \varepsilon)$ і функціонала $J(z(\cdot), \dot{z}(\cdot), \varepsilon)$ по z і $\dot{z}$ в околі точки $\varepsilon = 0$, виділимо у них лінійні частини по z і $\dot{z}$ та члени нульового порядку по ε .

У результаті маємо розвинення

$$\begin{aligned} Z(z_0 + x, \dot{z}_0 + \dot{x}, t, \varepsilon) &= Z(z_0, \dot{z}_0, t, 0) + T(t)x + H(t)\dot{x} + R(x, \dot{x}, t, \varepsilon), \\ J(z_0 + x, \dot{z}_0 + \dot{x}, \varepsilon) &= J_0(z_0, \dot{z}_0, 0) + \ell_0 x + \ell_1 \dot{x} + r(x, \dot{x}, \varepsilon), \end{aligned} \quad (25)$$

де

$$Z(z_0, \dot{z}_0, t, 0) = Z(z_0(t, c_{01}, c_{02}), \dot{z}_0(t, c_{01}, c_{02}), t, 0);$$

$$J_0(z_0, \dot{z}_0, 0) = J_0(z_0(\cdot, c_{01}, c_{02}), \dot{z}_0(\cdot, c_{01}, c_{02}), 0);$$

$T(t)$ — лінійний обмежений оператор, який є похідною Фреше від нелінійного оператора $Z(z, \dot{z}, t, \varepsilon)$ по z при $z = z_0(t, c_{01}, c_{02})$, $\dot{z} = \dot{z}_0(t, c_{01}, c_{02})$;

$H(t)$ — лінійний обмежений оператор, який є похідною Фреше від нелінійного оператора $Z(z, \dot{z}, t, \varepsilon)$ по $\dot{z}$ при $z = z_0(t, c_{01}, c_{02})$, $\dot{z} = \dot{z}_0(t, c_{01}, c_{02})$;

R — нелінійний оператор, який задовольняє умови (а2) і (а3) з (4);

ℓ_0 — лінійний обмежений вектор-функціонал, який є похідною Фреше від нелінійного функціонала $J(z, \dot{z}, \varepsilon)$ по z при $z = z_0(t, c_{01}, c_{02})$, $\dot{z} = \dot{z}_0(t, c_{01}, c_{02})$;

ℓ_1 — лінійний обмежений вектор-функціонал, який є похідною Фреше від нелінійного функціонала $J(z, \dot{z}, \varepsilon)$ по $\dot{z}$ при $z = z_0(t, c_{01}, c_{02})$, $\dot{z} = \dot{z}_0(t, c_{01}, c_{02})$;

r — нелінійний вектор-функціонал, задовольняє умови (а5) і (а6) з (4).

Отже, враховуючи заміну (22), будемо розглядати слабко нелінійну крайову задачу

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) - \int_a^b [P(t)W(s)x(s) + Q(t)V(s)\dot{x}(s)] ds \\ = \varepsilon \left[Z(z_0(t, c_{01}, c_{02}), \dot{z}_0(t, c_{01}, c_{02}), t, 0) \right. \\ \left. + T(t)x(t, \varepsilon) + H(t)\dot{x}(t, \varepsilon) + R(x(t, \varepsilon), \dot{x}(t, \varepsilon), t, \varepsilon) \right], \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \ell z(\cdot) = \varepsilon \left[J_0(z_0(\cdot, c_{01}, c_{02}), \dot{z}_0(\cdot, c_{01}, c_{02}), 0) \right. \\ \left. + \ell_0 x(\cdot, \varepsilon) + \ell_1 \dot{x}(\cdot, \varepsilon) + r(x(\cdot, \varepsilon), \dot{x}(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right] \end{aligned} \quad (27)$$

для знаходження відхилення $x(t, \varepsilon)$ від породжуючого розв'язку $z_0(t, c_{01}, c_{02})$.

За теоремою 2 крайова задача (26), (27) має розв'язок

$$x(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) & X_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{pmatrix} + \bar{x}(t, \varepsilon) = X(t)\hat{c} + \bar{x}(t, \varepsilon), \quad (28)$$

де елемент $\hat{c} = \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix}$ визначаємо з системи умов розв'язності вигляду (20):

$$\left\{ \begin{aligned} & \mathcal{P}_{Y_S} \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) \left[Z(z_0(s, c_{01}, c_{02}), \dot{z}_0(s, c_{01}, c_{02}), s, 0) + T(s)x(s, \varepsilon) \right. \\ & \quad \left. + H(s)\dot{x}(s, \varepsilon) + R(x(s, \varepsilon), \dot{x}(s, \varepsilon), s, \varepsilon) \right] ds = 0, \\ & \mathcal{P}_{Y_{\hat{Q}_2}} \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \left[J_0(z_0(\cdot, c_{01}, c_{02}), \dot{z}_0(\cdot, c_{01}, c_{02}), 0) + \ell_0 x(\cdot, \varepsilon) \right. \\ & \quad \left. + \ell_1 \dot{x}(\cdot, \varepsilon) + r(x(\cdot, \varepsilon), \dot{x}(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \ell L^- \left(Z(z_0(\cdot, c_{01}, c_{02}), \dot{z}_0(\cdot, c_{01}, c_{02}), \cdot, 0) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + T(\cdot)x(\cdot, \varepsilon) + H(\cdot)\dot{x}(\cdot, \varepsilon) + R(x(\cdot, \varepsilon), \dot{x}(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon) \right) (\cdot) \right] = 0, \end{aligned} \right. \quad (29)$$

а вектор-функцію $\bar{x}(t, \varepsilon)$ — частинний розв'язок неоднорідної крайової задачі (26), (27), знаходимо за формулою

$$\begin{aligned} \bar{x}(t, \varepsilon) = \varepsilon \left[\left(GZ(z_0(\cdot, c_{01}, c_{02}) + x(\cdot, \varepsilon), \dot{z}_0(\cdot, c_{01}, c_{02}) + \dot{x}(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon) \right) (t) \right. \\ \left. + \left[\tilde{X}_1(t)\tilde{Q}_1^- + \tilde{X}_2(t)\tilde{Q}_2^- \right] J(z_0(\cdot, c_{01}, c_{02}) + x(\cdot, \varepsilon), \dot{z}_0(\cdot, c_{01}, c_{02}) + \dot{x}(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right], \end{aligned}$$

де G — узагальнений оператор Гріна (17).

З огляду на те, що елементи c_{01} , c_{02} необхідно задовольняють систему рівнянь для породжуючих елементів (21), а також вигляд загального розв'язку (28), із системи (29) отримаємо

$$\left\{ \begin{aligned} & \mathcal{P}_{Y_S} \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) \left[T(s) \left\{ X(s) \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix} + \bar{x}(s, \varepsilon) \right\} \right. \\ & \quad \left. + H(s) \left\{ \dot{X}(s) \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix} + \dot{\bar{x}}(s, \varepsilon) \right\} + R(x(s, \varepsilon), \dot{x}(s, \varepsilon), s, \varepsilon) \right] ds = 0, \\ & \mathcal{P}_{Y_{\hat{Q}_2}} \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \left[\ell_0 \left\{ X(\cdot) \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix} + \bar{x}(\cdot, \varepsilon) \right\} + \ell_1 \left\{ \dot{X}(\cdot) \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix} + \dot{\bar{x}}(\cdot, \varepsilon) \right\} \right. \\ & \quad \left. + r(x(\cdot, \varepsilon), \dot{x}(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \ell L^- \left(T(\cdot) \left\{ X(\cdot) \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix} + \bar{x}(\cdot, \varepsilon) \right\} \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + H(\cdot) \left\{ \dot{X}(\cdot) \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix} + \dot{\bar{x}}(\cdot, \varepsilon) \right\} + R(x(\cdot, \varepsilon), \dot{x}(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon) \right) (\cdot) \right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Враховуючи, що проєктори $\mathcal{P}_{Y_S}$ і $\mathcal{P}_{Y_D}$ — (2×2) -вимірні матриці, а $X(t) = [X_1(t), X_2(t)]$, позначимо

$$\begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix} = \mathcal{P}_{Y_S} \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) [T(s) X_1(s) + H(s) \dot{X}_1(s)] ds,$$

$$\begin{bmatrix} B_{12} \\ B_{22} \end{bmatrix} = \mathcal{P}_{Y_S} \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) [T(s) X_2(s) + H(s) \dot{X}_2(s)] ds,$$

$$\begin{aligned} [B_{31} \quad B_{32}] &= [\mathcal{P}_{Y_{\hat{Q}_2}} \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \{ \ell_0 X_1(\cdot) + \ell_1 \dot{X}_1(\cdot) - \ell L^- (T(\cdot) X_1(\cdot) + H(\cdot) \dot{X}_1(\cdot)) \}, \\ & \quad \mathcal{P}_{Y_{\hat{Q}_2}} \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \{ \ell_0 X_2(\cdot) + \ell_1 \dot{X}_2(\cdot) - \ell L^- (T(\cdot) X_2(\cdot) + H(\cdot) \dot{X}_2(\cdot)) \}], \end{aligned}$$

лінійні обмежені операторні матриці.

Тоді використовуючи розвинення (25) і той факт, що елементи c_{01} і c_{02} задовольняють рівняння для породжуючих елементів (21), для знаходження розв'язку $x(t, \varepsilon)$ слабко нелінійної крайової задачі (23), (24) приходимо до еквівалентної операторної системи

$$\begin{aligned} x(t) &= X(t) \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix} + \bar{x}(t, \varepsilon), \\ \mathcal{B}_0 \hat{c} &= - \left[\begin{aligned} & \mathcal{P}_{Y_S} \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) [T(s) \bar{x}(s, \varepsilon) + H(s) \dot{\bar{x}}(s, \varepsilon) \\ & \quad + R(x(s, \varepsilon), \dot{x}(s, \varepsilon), s, \varepsilon)] ds \\ & \mathcal{P}_{Y_{\hat{Q}_2}} \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} [\ell_0 \bar{x}(\cdot, \varepsilon) + \ell_1 \dot{\bar{x}}(\cdot, \varepsilon) + r(x(\cdot, \varepsilon), \dot{x}(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \\ & \quad - \ell L^- (T(\cdot) \bar{x}(\cdot, \varepsilon) + H(\cdot) \dot{\bar{x}}(\cdot, \varepsilon) + R(x(\cdot, \varepsilon), \dot{x}(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon))(\cdot)] \end{aligned} \right], \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned}\bar{x}(t, \varepsilon) = \varepsilon \Big[& (GZ(z_0(\cdot, c_{01}, c_{02}) + x(\cdot, \varepsilon), \dot{z}_0(\cdot, c_{01}, c_{02}) + \dot{x}(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon))(t) + \\ & + \left[\tilde{X}_1(t) \tilde{Q}_1^- + \tilde{X}_2(t) \tilde{Q}_2^- \right] J(z_0(\cdot, c_{01}, c_{02}) + x(\cdot, \varepsilon), \dot{z}_0(\cdot, c_{01}, c_{02}) + \dot{x}(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \Big],\end{aligned}$$

де

$$\mathcal{B}_0 = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{B}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_1 = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} : \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2 \rightarrow \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2,$$

$$\mathcal{B}_2 = [B_{31} \quad B_{32}] : \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2 \rightarrow \mathbf{B}, \quad \hat{c} = \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix}.$$

Розв'язність слабо нелінійної крайової задачі (23), (24) залежить від існування розв'язку другого рівняння операторної системи (30). Тому розглянемо питання про умови розв'язності та вигляду загального розв'язку другого рівняння операторної системи (30) із операторною матрицею $\mathcal{B}_0 = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{B}_2 \end{bmatrix}$.

Якщо у скінченновимірних просторах узагальнене обернення операторної матриці $\mathcal{B}_0$ не є проблемою, то у банахових просторах узагальнене обернення операторної матриці викликає певні труднощі. Для розв'язання цієї задачі скористаємося результатами з робіт [21, 22].

Нехай оператор $\mathcal{B}_0 = \begin{bmatrix} \mathcal{B}_1 \\ \mathcal{B}_2 \end{bmatrix}$ узагальнено оборотний. Відомо [21], що операторна матриця $\mathcal{B}_0$ буде узагальнено оборотною тоді і лише тоді, коли оператори $\mathcal{B}_1$ та $\hat{\mathcal{B}}_2 = \mathcal{B}_2 \mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_1)}$ узагальнено оборотні.

Нехай оператори $\mathcal{B}_1 \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2)$ і $\hat{\mathcal{B}}_2 \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2, \mathbf{B})$ узагальнено оборотні. Внаслідок узагальненої оборотності операторів $\mathcal{B}_1$ і $\hat{\mathcal{B}}_2$ існують [23] обмежені проєктори $\mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_1)} : \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2 \rightarrow N(\mathcal{B}_1)$ на нуль-простір $N(\mathcal{B}_1)$ і $\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{B}_1}} : \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2 \rightarrow Y_{\mathcal{B}_1}$ — на підпростір $Y_{\mathcal{B}_1} = \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2 \ominus R(\mathcal{B}_1)$ оператора $\mathcal{B}_1$ і обмежені проєктори $\mathcal{P}_{N(\hat{\mathcal{B}}_2)} : \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2 \rightarrow N(\hat{\mathcal{B}}_2)$ — на нуль-простір і $\mathcal{P}_{Y_{\hat{\mathcal{B}}_2}} : \mathbf{B} \rightarrow Y_{\hat{\mathcal{B}}_2}$ — на підпростір $Y_{\hat{\mathcal{B}}_2} = I_{\mathbf{B}} \ominus R(\hat{\mathcal{B}}_2)$ оператора $\hat{\mathcal{B}}_2$, а також обмежені узагальнено обернені оператори $\mathcal{B}_1^-, \hat{\mathcal{B}}_2^-$.

Наслідком узагальненої оборотності оператора $\mathcal{B}_0$ є його нормальна розв'язність [24]. За класифікацією С. Г. Крейна [1] друге рівняння операторної системи (30) може бути: однозначно розв'язним ($\mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_0)} \equiv 0$), всюди розв'язним ($\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{B}_0}} \equiv 0$), неоднозначно і не всюди розв'язним ($\mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_0)} \neq 0, \mathcal{P}_{Y_{\mathcal{B}_0}} \neq 0$).

Побудова принаймні одного розв'язку. Розглянемо загальний випадок, коли друге рівняння операторної системи (30) неоднозначно і не всюди розв'язне, тобто $\mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_0)} \neq 0, \mathcal{P}_{Y_{\mathcal{B}_0}} \neq 0$.

Оскільки оператор $\mathcal{B}_0$ нормально розв'язний, то, використовуючи теорему 1 з [21, с. 538] про розв'язність рівняння з операторною матрицею, маємо, що друге рівняння операторної системи (30) має розв'язок тоді і лише тоді, коли виконується умова

$$\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{B}_0}} \left[\begin{array}{l} \mathcal{P}_{Y_S} \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) \left[T(s) \bar{x}(s, \varepsilon) + H(s) \dot{\bar{x}}(s, \varepsilon) \right. \\ \left. + R(x(s, \varepsilon), \dot{x}(s, \varepsilon), s, \varepsilon) \right] ds \\ \mathcal{P}_{Y_{\hat{Q}_2}} \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \left[\ell_0 \bar{x}(\cdot, \varepsilon) + \ell_1 \dot{\bar{x}}(t, \varepsilon) + r(x(\cdot, \varepsilon), \dot{x}(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right. \\ \left. - \ell L^-(T(\cdot) \bar{x}(\cdot, \varepsilon) + H(\cdot) \dot{\bar{x}}(\cdot, \varepsilon) + R(x(\cdot, \varepsilon), \dot{x}(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon))(\cdot)) \right] \end{array} \right] = 0,$$

при виконанні якої воно має сім'ю розв'язків

$$\hat{c} = \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix} = \mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_0)} \begin{bmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \end{bmatrix} - \mathcal{B}_0^- \left[\begin{array}{l} \mathcal{P}_{Y_S} \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) \left[T(s) \bar{x}(s, \varepsilon) + H(s) \dot{\bar{x}}(s, \varepsilon) \right. \\ \left. + R(x(s, \varepsilon), \dot{x}(s, \varepsilon), s, \varepsilon) \right] ds \\ \mathcal{P}_{Y_{\hat{Q}_2}} \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \left[\ell_0 \bar{x}(\cdot, \varepsilon) + \ell_1 \dot{\bar{x}}(t, \varepsilon) + r(x(\cdot, \varepsilon), \dot{x}(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right. \\ \left. - \ell L^-(T(\cdot) \bar{x}(\cdot, \varepsilon) + H(\cdot) \dot{\bar{x}}(\cdot, \varepsilon) + R(x(\cdot, \varepsilon), \dot{x}(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon))(\cdot)) \right] \end{array} \right],$$

де $\mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_0)} = \mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_1)} \mathcal{P}_{N(\hat{\mathcal{B}}_2)}$ — обмежений проєктор на нуль-простір оператора $\mathcal{B}_0$, $\tilde{c}_1 \in \mathbf{B}_1$, $\tilde{c}_2 \in \mathbf{B}_2$ — довільні елементи,

$$\mathcal{B}_0^- = \left[\mathcal{B}_1^- - \mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_1)} \hat{\mathcal{B}}_2^- \mathcal{B}_2 \mathcal{B}_1^-, \quad \mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_1)} \hat{\mathcal{B}}_2^- \right]$$

— обмежена узагальнено обернена операторна матриця до операторної матриці $\mathcal{B}_0$ [21, с. 538],

$$\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{B}_0}} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_{\mathcal{B}_1}} & 0 \\ -\mathcal{P}_{Y_{\hat{\mathcal{B}}_2}} \mathcal{B}_2 \mathcal{B}_1^- & \mathcal{P}_{Y_{\hat{\mathcal{B}}_2}} \end{bmatrix} \quad (31)$$

— обмежений проєктор на підпростір $Y_{\mathcal{B}_0} = I_{\mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2} \ominus R(\mathcal{B}_0)$.

Побудову узагальнено оберненої матриці до операторної матриці $\mathcal{B}_1$ наведено у [22].

Поклавши $\tilde{c}_1 = 0$, $\tilde{c}_2 = 0$, отримаємо один із сім'ї розв'язків другого рівняння операторної системи (30), оскільки $\mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_0)} \begin{bmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \end{bmatrix} = 0$.

Тоді з урахуванням (31) маємо, що друге рівняння операторної системи (30) буде розв'язним тоді і лише тоді, коли виконується умова

$$\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{B}_0}} \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_S} \mathcal{P}_{Y_D} \\ \mathcal{P}_{Y_{\hat{Q}_2}} \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_{\mathcal{B}_1}} & 0 \\ \tilde{\mathcal{P}}_1 & \mathcal{P}_{Y_{\hat{\mathcal{B}}_2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_S} \mathcal{P}_{Y_D} \\ \mathcal{P}_{Y_{\hat{Q}_2}} \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \end{bmatrix} = 0, \quad (32)$$

де $\tilde{\mathcal{P}}_1 = -\mathcal{P}_{Y_{\hat{\mathcal{B}}_2}} \mathcal{B}_2 \mathcal{B}_1^-$.

При виконанні умови (32) друге рівняння операторної системи (30) буде мати принаймні один розв'язок. Тоді система (30) набуде вигляду

$$x(t) = X(t) \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix} + \bar{x}(t, \varepsilon),$$

$$\begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix} = -B_0^- \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_S} \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) \left[T(s) \bar{x}(s, \varepsilon) + H(s) \dot{\bar{x}}(s, \varepsilon) + R(x(s, \varepsilon), \dot{x}(s, \varepsilon), s, \varepsilon) \right] ds \\ \mathcal{P}_{Y_{\hat{Q}_2}} \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \left[\ell_0 \bar{x}(\cdot, \varepsilon) + \ell_1 \dot{\bar{x}}(\cdot, \varepsilon) + r(x(\cdot, \varepsilon), \dot{x}(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon) \right. \\ \left. - \ell L^-(T(\cdot) \bar{x}(\cdot, \varepsilon) + H(\cdot) \dot{\bar{x}}(\cdot, \varepsilon) + R(x(\cdot, \varepsilon), \dot{x}(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon))(\cdot)) \right] \end{bmatrix},$$

$$\bar{x}(t, \varepsilon) = \varepsilon \left\{ \left(G \left[Z(z_0(\cdot, c_{01}, c_{02}), \dot{z}_0(\cdot, c_{01}, c_{02}), \cdot, 0) + T(\cdot) \begin{bmatrix} X(\cdot) \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix} + \bar{x}(\cdot, \varepsilon) \end{bmatrix} \right. \right. \right. \\ \left. \left. + H(\cdot) \left\{ \dot{X}(\cdot) \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix} + \dot{\bar{x}}(\cdot, \varepsilon) \right\} + R(x(\cdot, \varepsilon), \dot{x}(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon) \right] \right) (t) \\ \left. + \left[\tilde{X}_1(t) \tilde{Q}_1^- + \tilde{X}_2(t) \tilde{Q}_2^- \right] \left[J(z_0(\cdot, c_{01}, c_{02}), \dot{z}_0(\cdot, c_{01}, c_{02}), \varepsilon) \right. \right. \\ \left. \left. + \ell_0 \left\{ X(\cdot) \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix} + \bar{x}(\cdot, \varepsilon) \right\} + \ell_1 \left\{ \dot{X}(\cdot) \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix} + \dot{\bar{x}}(\cdot, \varepsilon) \right\} + r(x(\cdot, \varepsilon), \dot{x}(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon) \right] \right\}.$$

Використовуючи метод простих ітерацій для знаходження розв'язків крайової задачі (26), (27) у класі неперервних по ε вектор-функцій, які перетворюються в нуль при $\varepsilon = 0$, побудуємо ітераційний процес.

Наближення $\bar{x}_{k+1}(t, \varepsilon)$ до $\bar{x}(t, \varepsilon)$ будемо шукати як частинні розв'язки крайових задач

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_{k+1}(t) - \int_a^b [P(t)W(s)x_{k+1}(s) + Q(t)V(s)\dot{x}_{k+1}(s)] ds \\ = \varepsilon \left\{ Z(z_0(t, c_{01}, c_{02}), \dot{z}_0(t, c_{01}, c_{02}), t, 0) + T(t) \begin{bmatrix} X(t) \begin{bmatrix} \hat{c}_1^{(k)} \\ \hat{c}_2^{(k)} \end{bmatrix} + \bar{x}_k(t, \varepsilon) \end{bmatrix} \right. \\ \left. + H(t) \left[\dot{X}(t) \begin{bmatrix} \hat{c}_1^{(k)} \\ \hat{c}_2^{(k)} \end{bmatrix} + \dot{\bar{x}}_k(t, \varepsilon) \right] + R(x_k(t, \varepsilon), \dot{x}_k(t, \varepsilon), t, \varepsilon) \right\}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \ell \bar{x}_{k+1}(\cdot) = \varepsilon \left\{ J_0(z_0(\cdot, c_{01}, c_{02}), \dot{z}_0(\cdot, c_{01}, c_{02}), 0) + \ell_0 \begin{bmatrix} X(\cdot) \begin{bmatrix} \hat{c}_1^{(k)} \\ \hat{c}_2^{(k)} \end{bmatrix} \end{bmatrix} + \bar{x}_k(\cdot, \varepsilon) \right. \\ \left. + \ell_1 \left[\dot{X}(\cdot) \begin{bmatrix} \hat{c}_1^{(k)} \\ \hat{c}_2^{(k)} \end{bmatrix} + \dot{\bar{x}}_k(\cdot, \varepsilon) \right] + r(x_k(\cdot, \varepsilon), \dot{x}_k(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon) \right\}. \end{aligned} \quad (34)$$

Оскільки елементи c_{01} , c_{02} є розв'язками системи рівнянь для породжуючих елементів (21), то з необхідної та достатньої умови існування розв'язків крайових задач (33), (34) отримаємо операторні рівняння

$$\mathcal{B}_0 \hat{c}^{(k)} = - \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_S} \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) \left[T(s) \bar{x}_k(s, \varepsilon) + H(s) \dot{\bar{x}}_k(s, \varepsilon) + R(x_k(s, \varepsilon), \dot{x}_k(s, \varepsilon), s, \varepsilon) \right] ds \\ \mathcal{P}_{Y_{\hat{Q}_2}} \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \left[\ell_0 \bar{x}_k(\cdot, \varepsilon) + \ell_1 \dot{\bar{x}}_k(\cdot, \varepsilon) + r(x_k(\cdot, \varepsilon), \dot{x}_k(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \ell L^-(T(\cdot) \bar{x}_k(\cdot, \varepsilon) + H(\cdot) \dot{\bar{x}}_k(\cdot, \varepsilon) + R(x_k(\cdot, \varepsilon), \dot{x}_k(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon))(\cdot) \right] \end{bmatrix}, \quad (35)$$

з яких знаходимо k -ті наближення $\hat{c}^{(k)} = \begin{bmatrix} \hat{c}_1^{(k)} \\ \hat{c}_2^{(k)} \end{bmatrix}$ до $\hat{c} = \begin{bmatrix} \hat{c}_1 \\ \hat{c}_2 \end{bmatrix}$.

За теоремою 2 з урахуванням розвинень (25) частинні розв'язки крайових задач (33), (34) мають вигляд

$$\begin{aligned} \bar{x}_{k+1}(t, \varepsilon) = \varepsilon \left\{ \left(G \left[Z(z_0(\cdot, c_{01}, c_{02}), \dot{z}_0(\cdot, c_{01}, c_{02}), \cdot, 0) + T(\cdot) \left[X(\cdot) \begin{bmatrix} \hat{c}_1^{(k)} \\ \hat{c}_2^{(k)} \end{bmatrix} + \bar{x}_k(\cdot, \varepsilon) \right] + H(\cdot) \left\{ \dot{X}(\cdot) \begin{bmatrix} \hat{c}_1^{(k)} \\ \hat{c}_2^{(k)} \end{bmatrix} + \dot{\bar{x}}_k(\cdot, \varepsilon) \right\} + R(x_k(\cdot, \varepsilon), \dot{x}_k(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon) \right] \right) (t) \right. \\ \left. + \left[\tilde{X}_1(t) \tilde{Q}_1^- + \tilde{X}_2(t) \tilde{Q}_2^- \right] \left[J(z_0(\cdot, c_{01}, c_{02}), \dot{z}_0(\cdot, c_{01}, c_{02}), \varepsilon) + \ell_0 \left\{ X(\cdot) \begin{bmatrix} \hat{c}_1^{(k)} \\ \hat{c}_2^{(k)} \end{bmatrix} + \bar{x}_k(\cdot, \varepsilon) \right\} + \ell_1 \left\{ \dot{X}(\cdot) \begin{bmatrix} \hat{c}_1^{(k)} \\ \hat{c}_2^{(k)} \end{bmatrix} + \dot{\bar{x}}_k(\cdot, \varepsilon) \right\} + r(x_k(\cdot, \varepsilon), \dot{x}_k(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Виконання умови (32) забезпечує розв'язність операторних рівнянь (35) щодо $\hat{c}_k$ для кожного k .

Тоді $(k+1)$ -те наближення $x_{k+1}(t, \varepsilon)$ до $x(t, \varepsilon)$ буде мати вигляд

$$x_{k+1}(t, \varepsilon) = X(t) \begin{bmatrix} \hat{c}_1^{(k)} \\ \hat{c}_2^{(k)} \end{bmatrix} + \bar{x}_{k+1}(t, \varepsilon), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

де $x_0(t, \varepsilon) = \bar{x}_0(t, \varepsilon) = 0$, $x_1(t, \varepsilon) = \bar{x}_1(t, \varepsilon)$

Таким чином, для крайової задачі (2), (3) справедлива така теорема.

Теорема 4. Нехай крайова задача (2), (3) задовольняє умови (4), а відповідна породжуюча крайова задача (5), (6) при виконанні умов (18) має сім'ю породжуючих розв'язків (19).

Тоді, якщо оператори $\mathcal{B}_1 \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2)$ і $\hat{\mathcal{B}}_2 \in \mathbf{GI}(\mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2, \mathbf{B})$ узагальнено оборотні та виконуються умови

$$\mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_0)} = \mathcal{P}_{N(\mathcal{B}_1)} \mathcal{P}_{N(\hat{\mathcal{B}}_2)} \neq 0,$$

$$\mathcal{P}_{Y_{\mathcal{B}_0}} \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_S} \mathcal{P}_{Y_D} \\ \mathcal{P}_{Y_{\hat{Q}_2}} \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_{\mathcal{B}_1}} & 0 \\ \tilde{\mathcal{P}}_1 & \mathcal{P}_{Y_{\hat{\mathcal{B}}_2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_S} \mathcal{P}_{Y_D} \\ \mathcal{P}_{Y_{\hat{Q}_2}} \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} \end{bmatrix} = 0,$$

то для кожної пари елементів $c_{01} \in \mathbf{B}_1$, $c_{02} \in \mathbf{B}_2$, які задовольняють систему рівнянь для породжуючих елементів (21), крайова задача (2), (3) має принаймні один розв'язок $z(t, \varepsilon)$, неперервний по ε , який перетворюється у породжуючий розв'язок $z(t, c_{01}, c_{02})$ при $\varepsilon = 0$.

Цей розв'язок можна знайти за допомогою збіжного на $[0, \varepsilon_*] \subset \mathcal{I}_{\varepsilon_0}$ ітераційного процесу

$$z_{k+1}(t, \varepsilon) = z_0(t, c_{01}, c_{02}) + x_{k+1}(t, \varepsilon),$$

$$x_{k+1}(t, \varepsilon) = X(t) \begin{bmatrix} \hat{c}_1^{(k)} \\ \hat{c}_2^{(k)} \end{bmatrix} + \bar{x}_{k+1}(t, \varepsilon),$$

$$\hat{c}^{(k)} = -\mathcal{B}_0^- \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{Y_S} \mathcal{P}_{Y_D} \int_a^b N(s) [T(s) \bar{x}_k(s, \varepsilon) + H(s) \dot{\bar{x}}_k(s, \varepsilon) + R(x_k(s, \varepsilon), \dot{x}_k(s, \varepsilon), s, \varepsilon)] ds \\ \mathcal{P}_{Y_{\hat{Q}_2}} \mathcal{P}_{Y_{Q_1}} [\ell_0 \bar{x}_k(\cdot, \varepsilon) + \ell_1 \dot{\bar{x}}_k(\cdot, \varepsilon) + r(x_k(\cdot, \varepsilon), \dot{x}_k(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) - \ell L^-(T(\cdot) \bar{x}_k(\cdot, \varepsilon) + H(\cdot) \dot{\bar{x}}_k(\cdot, \varepsilon) + R(x_k(\cdot, \varepsilon), \dot{x}_k(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon))(\cdot)] \end{bmatrix}, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_{k+1}(t, \varepsilon) = \varepsilon \Bigg\{ & \left(G \left[Z(z_0(\cdot, c_{01}, c_{02}), \dot{z}_0(\cdot, c_{01}, c_{02}), \cdot, 0) + T(\cdot) \begin{bmatrix} X(\cdot) \begin{bmatrix} \hat{c}_1^{(k)} \\ \hat{c}_2^{(k)} \end{bmatrix} + \bar{x}_k(\cdot, \varepsilon) \end{bmatrix} \right. \right. \\ & \left. \left. + H(\cdot) \left\{ \dot{X}(\cdot) \begin{bmatrix} \hat{c}_1^{(k)} \\ \hat{c}_2^{(k)} \end{bmatrix} + \dot{\bar{x}}_k(\cdot, \varepsilon) \right\} + R(x_k(\cdot, \varepsilon), \dot{x}_k(\cdot, \varepsilon), \cdot, \varepsilon) \right] \right) (t) \\ & + [\tilde{X}_1(t) \tilde{Q}_1^- + \tilde{X}_2(t) \tilde{Q}_2^-] \left[J(z_0(\cdot, c_{01}, c_{02}), \dot{z}_0(\cdot, c_{01}, c_{02}), \varepsilon) \right. \\ & \left. + \ell_0 \left\{ X(\cdot) \begin{bmatrix} \hat{c}_1^{(k)} \\ \hat{c}_2^{(k)} \end{bmatrix} + \bar{x}_k(\cdot, \varepsilon) \right\} \right. \\ & \left. \left. + \ell_1 \left\{ \dot{X}(\cdot) \begin{bmatrix} \hat{c}_1^{(k)} \\ \hat{c}_2^{(k)} \end{bmatrix} + \dot{\bar{x}}_k(\cdot, \varepsilon) \right\} + r(x_k(\cdot, \varepsilon), \dot{x}_k(\cdot, \varepsilon), \varepsilon) \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$x_0(t, \varepsilon) = \bar{x}_0(t, \varepsilon) = 0, \quad x_1(t, \varepsilon) = \bar{x}_1(t, \varepsilon), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Доведення збіжності ітераційного процесу (36) проводимо аналогічно до [3, 4, 11, 20].

Зауваження. Аналогічні методи застосовано у [8] для побудови розв'язків слабконелінійних крайових задач для всюди розв'язних звичайних диференціальних рівнянь у критичних випадках, у [25, 26] — для побудови розв'язків не всюди розв'язних слабконелінійних інтегральних рівнянь і крайових задач для них у банахових просторах, а у [7] — для побудови розв'язків слабконелінійних крайових задач для не всюди розв'язних систем інтегро-диференціальних рівнянь у евклідових просторах.

Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів. Усі необхідні дані містяться в статті. Всі автори зробили рівномірний внесок у цю роботу, а також заявляють про відсутність спеціального фінансування для її виконання.

Література

1. С. Г. Крейн, *Линейные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, Москва (1971).
2. А. М. Самойленко, О. А. Бойчук, С. А. Кривошея, *Крайові задачі для систем лінійних інтегро-диференціальних рівнянь із виродженим ядром*, Укр. мат. журн., **48**, № 11, 1576–1579 (1996); **English translation:** Ukr. Math. J., **48**, № 11, 1785–1789 (1996).
3. Е. А. Гребеников, Ю. А. Рябов, *Конструктивные методы анализа нелинейных систем*, Наука, Москва (1979).
4. А. А. Бойчук, *Конструктивные методы анализа краевых задач*, Наук. думка, Киев (1990).
5. А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко, *Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи*, Изд-во Ин-та математики НАН Украины, Киев (1995).
6. А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко, *Линейные нетеровы краевые задачи для импульсных дифференциальных систем с запаздыванием*, Дифференц. уравнения, **30**, № 10, 1677–1682 (1994).
7. О. А. Бойчук, І. А. Головацька, *Слабконелінійні системи інтегро-диференціальних рівнянь*, Нелін. коливання, **16**, № 3, 460–474 (2013); **English translation:** J. Math. Sci., **203**, № 3, 306–321 (2014).
8. О. А. Бойчук, Є. В. Панасенко, *Слабконелінійні крайові задачі для диференціальних рівнянь у критичному випадку у банаховому просторі*, Нелін. коливання, **13**, № 4, 483–496 (2010); **English translation:** Nonlinear Oscil., **13**, 515–529 (2011).
9. А. М. Самойленко, Ю. В. Теплінський, *Елементи математичної теорії еволюційних рівнянь у банахових просторах*, Ін-т математики НАН України, Київ (2008).
10. В. П. Журавльов, *Слабконелінійні крайові задачі для інтегральних рівнянь Фредгольма з виродженим ядром у банахових просторах*, Нелін. коливання, **21**, № 3, 347–357 (2018); **English translation:** J. Math. Sci., **243**, № 3, 409–419 (2019).
11. В. П. Журавльов, *Слабко нелінійні крайові задачі для операторних рівнянь у банахових просторах*, Нелін. коливання, **24**, № 2, 170–184 (2021); **English translation:** J. Math. Sci., **270**, 263–279 (2023).
12. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, Москва (1970).
13. В. П. Журавльов, *Узагальнене обернення операторів Фредгольма з виродженим ядром у банахових просторах*, Нелін. коливання, **17**, № 3, 351–364 (2014); **English translation:** J. Math. Sci., **212**, № 3, 275–288 (2016).
14. В. Ф. Журавлев, *Обобщенно обратный оператор к интегро-дифференциальному в банаховом пространстве*, Нелін. коливання, **22**, № 2, 202–219 (2019); **English translation:** J. Math. Sci., **249**, 609–628 (2020).
15. А. М. Ляпунов, *Общая задача об устойчивости движения*, Гостехиздат, Москва (1950).
16. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Наука, Москва (1974).
17. N. N. Bogoliubov, Yu. A. Mitropolsky, A. M. Samoilenko, *Methods of accelerated convergence in nonlinear mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, New York (1976).

18. A. A. Boichuk, V. F. Zhuravlev, *Solvability criterion of integro-differential equations with degenerate kernel in Banach spaces*, Nonlinear Dyn. Syst. Theory, **18**, № 4, 331–341 (2018).
19. О. А. Бойчук, В. П. Журавльов, *Критерій розв'язності лінійних крайових задач для інтегро-диференціальних рівнянь в банахових просторах*, Укр. мат. журн., **72**, № 11, 1469–1486 (2020); **English translation:** Ukr. Math. J., **72**, № 11, 1695–1714 (2021).
20. А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко, *Нормально разрешимые краевые задачи*, Наук. думка, Киев (2019).
21. В. Ф. Журавлев, П. Н. Забродский, Н. П. Фомин, *Условия разрешимости и представление решений уравнений с операторными матрицами*, Укр. мат. журн., **71**, № 4, 471–485 (2019); **English translation:** Ukr. Math. J., **71**, № 4, 537–552 (2019).
22. В. П. Журавльов, М. П. Фомін, *Узагальнене обернення операторних матриць (узагальнення теореми Фробеніуса)*, Нелін. коливання, **26**, № 1, 42–54 (2023); **English translation:** J. Math. Sci., **278**, 974–987 (2024).
23. М. М. Попов, *Доповнювальні простори і деякі задачі сучасної геометрії просторів Банаха*, Математика сьогодні'07, **13**, 78–116 (2007).
24. И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник, *Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов*, Штиинца, Кишинев (1973).
25. В. П. Журавльов, М. П. Фомін, *Слабкозбурені інтегральні рівняння Фредгольма з виродженим ядром у банахових просторах*, Нелін. коливання, **20**, № 1, 85–97 (2017); **English translation:** J. Math. Sci., **229**, № 4, 425–438 (2018).
26. V. F. Zhuravlev, *Weakly nonlinear boundary-value problems for the Fredholm integral equations with degenerate kernels in Banach spaces*, Нелін. коливання, **21**, № 3, 347–357 (2018); **English translation:** J. Math. Sci., **243**, № 3, 409–419 (2019).

Одержано 20.02.24,
після доопрацювання — 09.05.24