

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ НЕОДНОРІДНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ З ПРЯМОКУТНИМИ МАТРИЦЯМИ ТА ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ У ФІКСОВАНІ МОМЕНТИ ЧАСУ

Михайло Єлішевич

Київський національний університет будівництва і архітектури
просп. Повітряних сил України, 31, Київ, 03037, Україна
e-mail: m-a-e@i.ua

We determine conditions of solvability and construct the general solution of the Cauchy problem for a system of linear inhomogeneous first-order differential equations with rectangular matrices and the pulse action at fixed instants of time.

Визначено умови розв'язності, побудовано загальний розв'язок і розв'язок задачі Коші для системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку з прямокутними матрицями і імпульсною дією у фіксовані моменти часу.

Постановка задачі. Для системи

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad t \in [a; b] \setminus \{t_i, i = \overline{1, d}\}, \quad (1)$$

$$x(t_i + 0) = S_i x(t_i - 0) + \eta_i, \quad i = \overline{1, d}, \quad (2)$$

розглядаємо задачу Коші з початковою умовою

$$x(\tau_0) = x_0, \quad \tau_0 \in [a; b]; \quad (3)$$

$t_i, i = \overline{1, d}$, — точки імпульсної дії, $a \leq t_1 < \dots < t_d \leq b$, $A(t)$, $B(t)$ — прямокутні матриці-функції розмірності $m \times n$, $f(t)$ — вектор-функція розмірності m , $A(t), B(t), f(t) \in C^\infty[a; b] \setminus \{t_i, i = \overline{1, d}\}$ дійсні або комплексні, у точках $t_i, i = \overline{1, d}$, можуть мати розриви першого роду, $S_i, i = \overline{1, d}$, — сталі квадратні матриці порядку n , $\eta_i, i = \overline{1, d}$, x_0 — сталі вектори розмірності n .

Задачу без імпульсної дії розглянуто в [1, 2]. У [1, с. 53–74] матриці $A(t)$ і $B(t)$ квадратні, $B(t)$ вироджена, у [2] матриці прямокутні. У [3–7] розглянуто задачу з імпульсною дією. У [3, с. 45–52; 4] матриця $B(t)$ одинична, у [5, 6] квадратна вироджена, у [7] матриці $A(t)$ і $B(t)$ прямокутні, імпульсна дія на відрізьку $[a; b]$ лише одна.

Основні означення. Позначимо через I_i нільпотентний блок Жордана порядку i , 0_i — нульовий вектор розмірності i , 0_{ij} — нульова матриця розмірності $i \times j$,

$$L(t) = A(t) - B(t)\frac{d}{dt}, \quad L^*(t) = A^*(t) + \frac{d}{dt} B^*(t)$$

— оператори, формально спряжені між собою.

Для зручності кожному з точок t_i , $i = \overline{1, d}$, будемо розглядати як дві різні точки $t_i - 0$ і $t_i + 0$. Похідні в цих точках розуміємо як праву і ліву відповідно. Якщо $t_1 > a$, то покладемо $t_0 + 0 = a$. Якщо $t_d < b$, то покладемо $t_{d+1} - 0 = b$.

Означення 1 [1, с. 54]. Елемент $\varphi^{(1)}(t) \in \ker B(t)$ має в точці $t \in [a; b]$ скінченний жордановий ланцюжок векторів матриці $B(t)$ щодо оператора $L(t)$ довжини p , $p \geq 1$, якщо існують вектори $\varphi^{(i)}(t)$, $i = \overline{1, p}$, які задовольняють співвідношення

$$B(t)\varphi^{(1)}(t) = 0,$$

$$B(t)\varphi^{(i)}(t) = L(t)\varphi^{(i-1)}(t), \quad i = \overline{2, p},$$

$$L(t)\varphi^{(p)}(t) \notin \operatorname{Im} B(t).$$

Означення 2. Елемент $\tilde{\varphi}^{(1)}(t) \in \ker B(t)$ має в точці $t \in [a; b]$ циклічний жордановий ланцюжок векторів матриці $B(t)$ щодо оператора $L(t)$ довжини $\tilde{p}$, $\tilde{p} \geq 1$, якщо існують вектори $\tilde{\varphi}^{(i)}(t)$, $i = \overline{1, \tilde{p}}$, які задовольняють співвідношення

$$B(t)\tilde{\varphi}^{(1)}(t) = 0,$$

$$B(t)\tilde{\varphi}^{(i)}(t) = L(t)\tilde{\varphi}^{(i-1)}(t), \quad i = \overline{2, \tilde{p}},$$

$$L(t)\tilde{\varphi}^{(\tilde{p})}(t) = 0.$$

Означення 3. Елемент $\hat{\varphi}^{(1)}(t)$ має в точці $t \in [a; b]$ допоміжний ланцюжок векторів матриці $B(t)$ щодо оператора $L(t)$ довжини $\hat{p}$, $\hat{p} \geq 1$, якщо існують вектори $\hat{\varphi}^{(i)}(t)$, $i = \overline{1, \hat{p}}$, які задовольняють співвідношення

$$B(t)\hat{\varphi}^{(i)}(t) = L(t)\hat{\varphi}^{(i-1)}(t), \quad i = \overline{2, \hat{p}},$$

$$B(t)\hat{\varphi}^{(1)}(t) \notin \operatorname{Im} L(t),$$

$$L(t)\hat{\varphi}^{(\hat{p})}(t) \notin \operatorname{Im} B(t).$$

Аналогічно визначимо ланцюжки векторів на відрізках $[t_i + 0; t_{i+1} - 0]$, $i = \overline{0, d}$.

У цій роботі розглядаємо випадок, коли можуть існувати скінченні, циклічні та допоміжні ланцюжки, але $\operatorname{rank} B(t) = \operatorname{const}$, $\operatorname{rank} L(t) = \operatorname{const}$ на кожному з відрізків $[t_i + 0; t_{i+1} - 0]$, $i = \overline{0, d}$, внаслідок чого кількості і довжини вказаних ланцюжків на кожному з цих відрізків сталі.

Деякі теореми наведемо без доведень, оскільки вони аналогічні доведень згаданих раніше теорем.

Отриманий результат. Спочатку розглянемо випадок, коли $t_1 > a$, $t_d < b$.

Розглянемо окремо кожен з відрізків $[t_k + 0; t_{k+1} - 0]$, $k = \overline{0, d}$. Нехай k фіксоване, $t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0]$. Аналогічно до [2, 7, 8] будемо вважати, що існують такі ланцюжки векторів:

– матриці $B(t)$ щодо оператора $L(t)$:

$\check{r}_k$ циклічних одиничної довжини: $\check{\varphi}_{ki}(t)$, $i = \overline{1, \check{r}_k}$;

$\tilde{r}_k$ циклічних довжин $(\tilde{s}_{ki} + 1)$: $\tilde{\varphi}_{ki}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, \tilde{s}_{ki} + 1}$, $i = \overline{1, \tilde{r}_k}$;

r_k скінченних довжин s_{ki} : $\varphi_{ki}^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, s_{ki}}$, $i = \overline{1, r_k}$;

- $\hat{r}_k$ допоміжних довжин $\hat{s}_{ki} : \hat{\varphi}_{ki}^{(j)}(t), j = \overline{1, \hat{s}_{ki}}, i = \overline{1, \hat{r}_k}$;
 – матриці $B^*(t)$ щодо оператора $L^*(t)$;
 $\check{r}_k$ циклічних одиничної довжини: $\check{\psi}_{ki}(t), i = \overline{1, \check{r}_k}$;
 $\hat{r}_k$ циклічних довжин $(\hat{s}_{ki} + 1) : \hat{\psi}_{ki}^{(j)}(t), j = \overline{1, \hat{s}_{ki} + 1}, i = \overline{1, \hat{r}_k}$;
 r_k скінченних довжин $s_{ki} : \psi_{ki}^{(j)}(t), j = \overline{1, s_{ki}}, i = \overline{1, r_k}$;
 $\tilde{r}_k$ допоміжних довжин $\tilde{s}_{ki} : \hat{\psi}_{ki}^{(j)}(t), j = \overline{1, \tilde{s}_{ki}}, i = \overline{1, \tilde{r}_k}$.

Також існують

- $\check{r}_k$ векторів $\check{\varphi}_{ki}(t) \notin \text{Im } B(t) \cup \text{Im } L(t), i = \overline{1, \check{r}_k}$;
- $\check{r}_k$ векторів $\check{\psi}_{ki}(t) \notin \text{Im } B^*(t) \cup \text{Im } L^*(t), i = \overline{1, \check{r}_k}$;
- α_k векторів $q_{ki}(t), i = \overline{1, \alpha_k}$;
- α_k векторів $p_{ki}(t), i = \overline{1, \alpha_k}$.

Тут

$$\check{r}_k \geq 0, \quad \tilde{r}_k \geq 0, \quad r_k \geq 0, \quad \check{r}_k \geq 0, \quad \hat{r}_k \geq 0,$$

$$0 < \tilde{s}_{k1} \leq \dots \leq \tilde{s}_{k\tilde{r}_k}, \quad s_{k1} \geq \dots \geq s_{kr_k} > 0, \quad 0 < \hat{s}_{k1} \leq \dots \leq \hat{s}_{k\hat{r}_k},$$

$$\alpha_k = n - \check{r}_k - \tilde{r}_k - \tilde{s}_k - s_k - \hat{s}_k = m - \check{r}_k - \hat{r}_k - \hat{s}_k - s_k - \tilde{s}_k,$$

$$s_k = \sum_{i=1}^{r_k} s_{ki}, \quad \tilde{s}_k = \sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} \tilde{s}_{ki}, \quad \hat{s}_k = \sum_{i=1}^{\hat{r}_k} \hat{s}_{ki}.$$

Елементи кожної з наступних множин належать $C^\infty[t_k + 0; t_{k+1} - 0]$ і лінійно незалежні:

- 1) $q_{ki}(t), i = \overline{1, \alpha_k}, \check{\varphi}_{ki}(t), i = \overline{1, \check{r}_k}, \check{\varphi}_{ki}^{(j)}(t), j = \overline{1, \tilde{s}_{ki} + 1}, i = \overline{1, \tilde{r}_k}, \varphi_{ki}^{(j)}(t), j = \overline{1, s_{ki}}, i = \overline{1, r_k}, \hat{\varphi}_{ki}^{(j)}(t), j = \overline{1, \hat{s}_{ki}}, i = \overline{1, \hat{r}_k}$;
- 2) $B(t)q_{ki}(t), i = \overline{1, \alpha_k}, \check{\varphi}_{ki}(t), i = \overline{1, \check{r}_k}, L(t)\check{\varphi}_{ki}^{(j)}(t), j = \overline{1, \tilde{s}_{ki}}, i = \overline{1, \tilde{r}_k}, L(t)\varphi_{ki}^{(j)}(t), j = \overline{1, s_{ki}}, i = \overline{1, r_k}, B(t)\hat{\varphi}_{ki}^{(1)}(t), i = \overline{1, \hat{r}_k}, L(t)\hat{\varphi}_{ki}^{(j)}(t), j = \overline{1, \hat{s}_{ki}}, i = \overline{1, \hat{r}_k}$;
- 3) $p_{ki}(t), i = \overline{1, \alpha_k}, \check{\psi}_{ki}(t), i = \overline{1, \check{r}_k}, \check{\psi}_{ki}^{(j)}(t), j = \overline{1, \hat{s}_{ki} + 1}, i = \overline{1, \hat{r}_k}, \psi_{ki}^{(j)}(t), j = \overline{1, s_{ki}}, i = \overline{1, r_k}, \hat{\psi}_{ki}^{(j)}(t), j = \overline{1, \tilde{s}_{ki}}, i = \overline{1, \tilde{r}_k}$;
- 4) $B^*(t)p_{ki}(t), i = \overline{1, \alpha_k}, \check{\psi}_{ki}(t), i = \overline{1, \check{r}_k}, L^*(t)\check{\psi}_{ki}^{(j)}(t), j = \overline{1, \tilde{s}_{ki}}, i = \overline{1, \tilde{r}_k}, L^*(t)\psi_{ki}^{(j)}(t), j = \overline{1, s_{ki}}, i = \overline{1, r_k}, B^*(t)\hat{\psi}_{ki}^{(1)}(t), i = \overline{1, \tilde{r}_k}, L^*(t)\hat{\psi}_{ki}^{(j)}(t), j = \overline{1, \tilde{s}_{ki}}, i = \overline{1, \tilde{r}_k}$.

Пари множин 1) і 4), 2) і 3) відповідно являють собою біортогональні системи

$$(B(t)q_{ki}(t), p_{ki}(t)) = (q_{ki}(t), B^*(t)p_{ki}(t)) = 1, \quad i = \overline{1, \alpha_k},$$

$$(\check{\varphi}_{ki}(t), \check{\psi}_{ki}(t)) = 1, \quad i = \overline{1, \check{r}_k},$$

$$(\check{\varphi}_{ki}(t), \check{\psi}_{ki}(t)) = 1, \quad i = \overline{1, \check{r}_k},$$

$$(\hat{\varphi}_{ki}^{(j)}(t), L^*(t)\hat{\psi}_{ki}^{(\tilde{s}_{ki}+1-j)}(t)) = (L(t)\hat{\varphi}_{ki}^{(j)}(t), \hat{\psi}_{ki}^{(\tilde{s}_{ki}+1-j)}(t)) = 1, \quad j = \overline{1, \tilde{s}_{ki}}, \quad i = \overline{1, \tilde{r}_k},$$

$$(\hat{\varphi}_{ki}^{(\tilde{s}_{ki}+1)}(t), B^*(t)\hat{\psi}_{ki}^{(1)}(t)) = 1, \quad i = \overline{1, \tilde{r}_k},$$

$$\left(\hat{\varphi}_{ki}^{(j)}(t), L^*(t)\tilde{\psi}_{ki}^{(\hat{s}_{ki}+1-j)}(t)\right) = \left(L(t)\hat{\varphi}_{ki}^{(j)}(t), \tilde{\psi}_{ki}^{(\hat{s}_{ki}+1-j)}(t)\right) = 1, \quad j = \overline{1, \hat{s}_{ki}}, \quad i = \overline{1, \hat{r}_k},$$

$$\left(B(t)\hat{\varphi}_{ki}^{(1)}(t), \tilde{\psi}_{ki}^{(\hat{s}_{ki}+1)}(t)\right) = 1, \quad i = \overline{1, \hat{r}_k},$$

$$\left(\varphi_{ki}^{(j)}(t), L^*(t)\psi_{ki}^{(s_{ki}+1-j)}(t)\right) = \left(L(t)\varphi_{ki}^{(j)}(t), \psi_{ki}^{(s_{ki}+1-j)}(t)\right) = 1, \quad j = \overline{1, s_{ki}}, \quad i = \overline{1, r_k},$$

усі інші скалярні добутки векторів із відповідних пар множин рівні 0.

З використанням елементів множин 1) і 3) складемо прямокутні матриці і вектори, що належать $C^\infty[t_k + 0; t_{k+1} - 0]$:

$$Q_k(t) = [q_{k1}(t), \dots, q_{k\alpha_k}(t)],$$

$$\Phi_{ki}(t) = [\varphi_{ki}^{(1)}(t), \dots, \varphi_{ki}^{(s_{ki})}(t)], \quad i = \overline{1, r_k},$$

$$\tilde{\Phi}_{kij}(t) = [\tilde{\varphi}_{ki}^{(j)}(t), \dots, \tilde{\varphi}_{ki}^{(1)}(t)], \quad j = \tilde{s}_{ki}, \tilde{s}_{ki} + 1, \quad i = \overline{1, \tilde{r}_k},$$

$$\hat{\Phi}_{ki}(t) = [\hat{\varphi}_{ki}^{(1)}(t), \dots, \hat{\varphi}_{ki}^{(\hat{s}_{ki})}(t)], \quad i = \overline{1, \hat{r}_k},$$

$$P_k(t) = [p_{k1}(t), \dots, p_{k\alpha_k}(t)],$$

$$\Psi_{ki}(t) = [\psi_{ki}^{(s_{ki})}(t), \dots, \psi_{ki}^{(1)}(t)], \quad i = \overline{1, r_k},$$

$$\tilde{\Psi}_{kij}(t) = [\tilde{\psi}_{ki}^{(j)}(t), \dots, \tilde{\psi}_{ki}^{(1)}(t)], \quad j = \hat{s}_{ki}, \hat{s}_{ki} + 1, \quad i = \overline{1, \hat{r}_k},$$

$$\hat{\Psi}_{ki}(t) = [\hat{\psi}_{ki}^{(1)}(t), \dots, \hat{\psi}_{ki}^{(\hat{s}_{ki})}(t)], \quad i = \overline{1, \hat{r}_k},$$

$X_k(t)$ — фундаментальна матриця однорідної системи

$$\frac{dx_k}{dt} = P_k^*(t)(L(t)Q_k(t))x_k,$$

$$\tilde{X}_k(t) = Q_k(t)X_k(t),$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}_k(t) = & \tilde{X}_k(t) \int_{t=t_k+0}^t X_k^{-1}(\tau)P_k^*(\tau)f(\tau) d\tau - \sum_{i=1}^{r_k} \Phi_{ki}(t) \sum_{j=0}^{s_{ki}-1} I_{s_{ki}}^j \frac{d^j}{dt^j} (\Psi_{ki}^*(t)f(t)) \\ & - \sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} \tilde{\Phi}_{kij}(t) \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{ki}-1} (I_{\tilde{s}_{ki}}^T)^j \frac{d^j}{dt^j} (\hat{\Psi}_{ki}^*(t)f(t)) \\ & - \sum_{i=1}^{\hat{r}_k} \hat{\Phi}_{ki}(t) \sum_{j=0}^{\hat{s}_{ki}-1} I_{\hat{s}_{ki}}^j \frac{d^j}{dt^j} (\tilde{\Psi}_{ki\hat{s}_{ki}}^*(t)f(t)), \end{aligned}$$

c_k — довільний сталий вектор розмірності α_k , $\tilde{\beta}_{ki}(t) \in C^\infty[t_k + 0; t_{k+1} - 0]$, $i = \overline{1, \tilde{r}_k}$, $\tilde{\beta}_{ki}(t) \in C^\infty[t_k + 0; t_{k+1} - 0]$, $i = \overline{1, \tilde{r}_k}$, — довільні скалярні функції,

$$\begin{aligned}
\beta_k &= \text{col} \left(c_k, \tilde{\beta}_{k1}(t), \dots, \frac{d^{\tilde{s}_{k1}}}{dt^{\tilde{s}_{k1}}} \tilde{\beta}_{k1}(t), \dots, \tilde{\beta}_{k\tilde{r}_k}(t), \dots \right. \\
&\quad \left. \frac{d^{\tilde{s}_{k\tilde{r}_k}}}{dt^{\tilde{s}_{k\tilde{r}_k}}} \tilde{\beta}_{k\tilde{r}_k}(t), \check{\beta}_{k1}(t), \dots, \check{\beta}_{k\check{r}_k}(t) \right) \Big|_{t=t_{k+1}-0}, \quad k = \overline{0, d-1}, \quad (4) \\
\hat{X}_k &= \left[\tilde{X}_k(t_{k+1}-0), \tilde{\Phi}_{k1, \tilde{s}_{k1}+1}(t_{k+1}-0), \dots, \tilde{\Phi}_{k\tilde{r}_k, \tilde{s}_{k\tilde{r}_k}+1}(t_{k+1}-0), \right. \\
&\quad \left. \check{\varphi}_{k1}(t_{k+1}-0), \dots, \check{\varphi}_{k\check{r}_k}(t_{k+1}-0) \right], \quad k = \overline{0, d-1}, \\
\tilde{A}_k &= \text{col} \left[\sum_{i=0}^{s_{k1}-1} I_{s_{k1}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\Psi_{k1}^*(t)A(t)), \dots, \sum_{i=0}^{s_{kr_k}-1} I_{s_{kr_k}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\Psi_{kr_k}^*(t)A(t)), \right. \\
&\quad \left. \sum_{i=0}^{\hat{s}_{k1}-1} I_{\hat{s}_{k1}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\tilde{\Psi}_{k1\hat{s}_{k1}}^*(t)A(t)), \dots, \sum_{i=0}^{\hat{s}_{k\tilde{r}_k}-1} I_{\hat{s}_{k\tilde{r}_k}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\tilde{\Psi}_{k\tilde{r}_k\hat{s}_{k\tilde{r}_k}}^*(t)A(t)) \right] \Big|_{t=t_k+0}, \quad k = \overline{1, d}, \\
\tilde{f}_k &= \text{col} \left[\sum_{i=0}^{s_{k1}-1} I_{s_{k1}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\Psi_{k1}^*(t)f(t)), \dots, \sum_{i=0}^{s_{kr_k}-1} I_{s_{kr_k}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\Psi_{kr_k}^*(t)f(t)), \right. \\
&\quad \left. \sum_{i=0}^{\hat{s}_{k1}-1} I_{\hat{s}_{k1}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\tilde{\Psi}_{k1\hat{s}_{k1}}^*(t)f(t)), \dots, \sum_{i=0}^{\hat{s}_{k\tilde{r}_k}-1} I_{\hat{s}_{k\tilde{r}_k}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\tilde{\Psi}_{k\tilde{r}_k\hat{s}_{k\tilde{r}_k}}^*(t)f(t)) \right] \Big|_{t=t_k+0}, \quad k = \overline{1, d}, \\
\tilde{B}_k &= X_k^{-1}(t_k+0)P_k^*(t_k+0)B(t_k+0), \quad \hat{A}_k = \tilde{A}_k S_k \hat{X}_{k-1}, \quad \Xi_k = \hat{A}_k^-, \\
\hat{x}_k &= S_k \tilde{x}_{k-1}(t_k-0) + \eta_k, \quad k = \overline{1, d},
\end{aligned}$$

матриці Θ_k і Υ_k складемо з елементів базисів $\ker \hat{A}_k$ і $\ker \hat{A}_k^*$ відповідно, матриці Ξ_k і Θ_k подамо у такому вигляді:

$$\Xi_k = \text{col} \left(\Xi_{k0}, \tilde{\Xi}_{k1}^{(0)}, \dots, \tilde{\Xi}_{k1}^{(\tilde{s}_{k-1,1})}, \dots, \tilde{\Xi}_{k\tilde{r}_{k-1}}^{(0)}, \dots, \tilde{\Xi}_{k\tilde{r}_{k-1}}^{(\tilde{s}_{k-1, \tilde{r}_{k-1}})}, \check{\Xi}_{k1}, \dots, \check{\Xi}_{k\check{r}_{k-1}} \right), \quad (5)$$

$$\Theta_k = \text{col} \left(\Theta_{k0}, \tilde{\Theta}_{k1}^{(0)}, \dots, \tilde{\Theta}_{k1}^{(\tilde{s}_{k-1,1})}, \dots, \tilde{\Theta}_{k\tilde{r}_{k-1}}^{(0)}, \dots, \tilde{\Theta}_{k\tilde{r}_{k-1}}^{(\tilde{s}_{k-1, \tilde{r}_{k-1}})}, \check{\Theta}_{k1}, \dots, \check{\Theta}_{k\check{r}_{k-1}} \right), \quad (6)$$

де Ξ_{k0} і Θ_{k0} — прямокутні матриці розмірності $\alpha_{k-1} \times (s_k + \hat{s}_k)$ і $\alpha_{k-1} \times \dim \ker \hat{A}_k$, усі інші компоненти матриць Ξ_k і Θ_k — матриці-рядки розмірності $(s_k + \hat{s}_k)$ і $\dim \ker \hat{A}_k$ відповідно, $\tilde{c}_k$ — довільний сталий вектор розмірності $\dim \ker \hat{A}_k$,

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 S_1 \hat{X}_0 \Theta_1 & -\Theta_{20} & 0_{\alpha_1, \dim \ker \hat{A}_3} & \cdots & 0_{\alpha_1, \dim \ker \hat{A}_{d-1}} & 0_{\alpha_1, \dim \ker \hat{A}_d} \\ 0_{\alpha_2, \dim \ker \hat{A}_1} & \tilde{B}_2 S_2 \hat{X}_1 \Theta_2 & -\Theta_{30} & \cdots & 0_{\alpha_2, \dim \ker \hat{A}_{d-1}} & 0_{\alpha_2, \dim \ker \hat{A}_d} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0_{\alpha_{d-1}, \dim \ker \hat{A}_1} & 0_{\alpha_{d-1}, \dim \ker \hat{A}_2} & 0_{\alpha_{d-1}, \dim \ker \hat{A}_3} & \cdots & \tilde{B}_{d-1} S_{d-1} \hat{X}_{d-2} \Theta_{d-1} & -\Theta_{d0} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\bar{\Xi} = \bar{A}^-,$$

$$\bar{f} = \text{col} \left(\tilde{B}_1 \left(S_1 \hat{X}_0 \Xi_1 (\tilde{A}_1 \hat{x}_1 + \tilde{f}_1) - \hat{x}_1 \right) - \Xi_{20} (\tilde{A}_2 \hat{x}_2 + \tilde{f}_2), \dots, \right. \\ \left. \tilde{B}_{d-1} \left(S_{d-1} \hat{X}_{d-2} \Xi_{d-1} (\tilde{A}_{d-1} \hat{x}_{d-1} + \tilde{f}_{d-1}) - \hat{x}_{d-1} \right) - \Xi_{d0} (\tilde{A}_d \hat{x}_d + \tilde{f}_d) \right), \quad (8)$$

$$\tilde{c} = \text{col}(\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_d). \quad (9)$$

Матриці $\bar{\Theta}$ і $\bar{\Upsilon}$ складемо з елементів базисів $\ker \bar{A}$ і $\ker \bar{A}^*$ відповідно. Матриці $\bar{\Xi}$ і $\bar{\Theta}$ подамо у вигляді

$$\bar{\Xi} = \text{col}(\bar{\Xi}_1, \dots, \bar{\Xi}_d), \quad \bar{\Theta} = \text{col}(\bar{\Theta}_1, \dots, \bar{\Theta}_d),$$

де $\bar{\Xi}_k$ і $\bar{\Theta}_k$, $k = \overline{1, d}$, — прямокутні матриці розмірності $\dim \ker \hat{A}_k \times \sum_{i=1}^{d-1} \alpha_i$ і $\dim \ker \hat{A}_k \times \dim \ker \bar{A}$ відповідно, $\bar{c}$ — довільний сталий вектор розмірності $\dim \ker \bar{A}$.

Згідно з [2] для розв'язності системи (1) на кожному з відрізків $[t_k + 0; t_{k+1} - 0]$, $k = \overline{0, d}$, необхідно і достатньо виконання рівностей

$$\sum_{j=0}^{\hat{s}_{ki}} \frac{d^j}{dt^j} \left(f(t), \tilde{\psi}_{ki}^{(\hat{s}_{ki}-j+1)}(t) \right) = 0, \quad i = \overline{1, \hat{r}_k}, \quad t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k = \overline{0, d}, \quad (10)$$

$$\left(f(t), \check{\psi}_{ki}(t) \right) = 0, \quad i = \overline{1, \check{r}_k}, \quad t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k = \overline{0, d}. \quad (11)$$

При їхньому виконанні система (1) має загальний розв'язок

$$x(t) = \tilde{X}_k(t) c_k + \tilde{x}_k(t) + \sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{ki}} \left(\frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{ki}(t) \right) \tilde{\varphi}_{ki}^{(\tilde{s}_{ki}-j+1)}(t) + \sum_{i=1}^{\check{r}_k} \check{\beta}_{ki}(t) \check{\varphi}_{ki}(t), \quad (12) \\ t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k = \overline{0, d}.$$

Для розв'язності задачі Коші системи (1), (3) при $\tau_0 = t_k + 0$ необхідно і достатньо виконання рівностей (10), (11) і

$$\tilde{A}_k x_0 + \tilde{f}_k = 0. \quad (13)$$

При їхньому виконанні вона має розв'язки

$$x(t) = \tilde{X}_k(t) \tilde{B}_k x_0 + \tilde{x}_k(t) \\ + \sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{ki}} \left(\frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{ki}(t) \right) \tilde{\varphi}_{ki}^{(\tilde{s}_{ki}-j+1)}(t) + \sum_{i=1}^{\check{r}_k} \check{\beta}_{ki}(t) \check{\varphi}_{ki}(t), \quad t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad (14)$$

$$\tilde{\beta}_{ki}(t_k + 0) = \left(x_0, B^*(t_k + 0) \hat{\psi}_{ki}^{(1)}(t_k + 0) \right), \quad i = \overline{1, \check{r}_k}, \quad (15)$$

$$\left. \frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{ki}(t) \right|_{t=t_k+0} = \left[\left(x_0, L^*(t) \hat{\psi}_{ki}^{(j)}(t) \right) + \sum_{u=0}^{j-1} \frac{d^u}{dt^u} \left(f(t), \hat{\psi}_{ki}^{(j-u)}(t) \right) \right] \Big|_{t=t_k+0}, \quad j = \overline{1, \tilde{s}_{ki}}, \quad i = \overline{1, \tilde{r}_k}, \quad (16)$$

$$\check{\beta}_{ki}(t_k + 0) = (x_0, \check{\psi}_{ki}(t_k + 0)), \quad i = \overline{1, \check{r}_k}. \quad (17)$$

Теорема 1. Якщо $a < t_1$, $b > t_d$, існують множини векторів $1) - 4)$, $\alpha_k > 0$, $k = \overline{0, d}$, то система (1), (2) розв'язна в тому і тільки тому випадку, коли виконуються рівності (10), (11) і

$$\Upsilon_k^* (\tilde{A}_k \hat{x}_k + \tilde{f}_k) = 0, \quad k = \overline{1, d}, \quad (18)$$

$$\bar{\Upsilon} \bar{f} = 0. \quad (19)$$

При їхньому виконанні система (1), (2) має загальний розв'язок

$$\begin{aligned} x(t) = & \tilde{X}_k(t) \left[\Theta_{k+1,0} (\bar{\Theta}_{k+1} \bar{c} + \bar{\Xi}_{k+1} \bar{f}) - \Xi_{k+1,0} (\tilde{A}_{k+1} \hat{x}_{k+1} + \tilde{f}_{k+1}) \right] \\ & + \tilde{x}_k(t) + \sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{ki}} \left(\frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{ki}(t) \right) \tilde{\varphi}_{ki}^{(\tilde{s}_{ki}-j+1)}(t) \\ & + \sum_{i=1}^{\check{r}_k} \check{\beta}_{ki}(t) \check{\varphi}_{ki}(t), \quad t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k = \overline{0, d-1}, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} x(t) = & \tilde{X}_k(t) \tilde{B}_k \left\{ S_k \hat{X}_{k-1} \left[\Theta_k (\bar{\Theta}_k \bar{c} + \bar{\Xi}_k \bar{f}) - \Xi_k (\tilde{A}_k \hat{x}_k + \tilde{f}_k) \right] + \hat{x}_k \right\} \\ & + \tilde{x}_k(t) + \sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{ki}} \left(\frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{ki}(t) \right) \tilde{\varphi}_{ki}^{(\tilde{s}_{ki}-j+1)}(t) + \sum_{i=1}^{\check{r}_k} \check{\beta}_{ki}(t) \check{\varphi}_{ki}(t), \end{aligned} \quad (21)$$

$$t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k = \overline{1, d}$$

(вирази (20) і (21) при $k = \overline{1, d-1}$ еквівалентні),

$$\left. \frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{ki}(t) \right|_{t=t_{k+1}-0} = \tilde{\Theta}_{k+1,i}^{(j)} (\bar{\Theta}_{k+1} \bar{c} + \bar{\Xi}_{k+1} \bar{f}) - \tilde{\Xi}_{k+1,i}^{(j)} (\tilde{A}_{k+1} \hat{x}_{k+1} + \tilde{f}_{k+1}), \quad (22)$$

$$j = \overline{0, \tilde{s}_{ki}}, \quad i = \overline{1, \tilde{r}_k}, \quad k = \overline{0, d-1},$$

$$\check{\beta}_{ki}(t_{k+1} - 0) = \check{\Theta}_{k+1,i} (\bar{\Theta}_{k+1} \bar{c} + \bar{\Xi}_{k+1} \bar{f}) - \check{\Xi}_{k+1,i} (\tilde{A}_{k+1} \hat{x}_{k+1} + \tilde{f}_{k+1}), \quad (23)$$

$$i = \overline{1, \check{r}_k}, \quad k = \overline{0, d-1},$$

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_{ki}(t_k + 0) = & \left(S_k \hat{X}_{k-1} \left[\Theta_k (\bar{\Theta}_k \bar{c} + \bar{\Xi}_k \bar{f}) - \Xi_k (\tilde{A}_k \hat{x}_k + \tilde{f}_k) \right] \right. \\ & \left. + \hat{x}_k, B^*(t_k + 0) \hat{\psi}_{ki}^{(1)}(t_k + 0) \right), \quad i = \overline{1, \tilde{r}_k}, \quad k = \overline{1, d}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{ki}(t) \right|_{t=t_k+0} &= \left[\left(S_k \hat{X}_{k-1} \left[\Theta_k (\bar{\Theta}_k \bar{c} + \bar{\Xi}_k \bar{f}) - \bar{\Xi}_k (\tilde{A}_k \hat{x}_k + \tilde{f}_k) \right] + \hat{x}_k, L^*(t) \hat{\psi}_{ki}^{(j)}(t) \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{u=0}^{j-1} \frac{d^u}{dt^u} \left(f(t), \hat{\psi}_{ki}^{(j-u)}(t) \right) \right] \Big|_{t=t_k+0}, \quad j = \overline{1, \tilde{s}_{ki}}, \quad i = \overline{1, \tilde{r}_k}, \quad k = \overline{1, d}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \check{\beta}_{ki}(t_k + 0) &= \left(S_k \hat{X}_{k-1} \left[\Theta_k (\bar{\Theta}_k \bar{c} + \bar{\Xi}_k \bar{f}) - \bar{\Xi}_k (\tilde{A}_k \hat{x}_k + \tilde{f}_k) \right] + \hat{x}_k, \check{\psi}_{ki}(t_k + 0) \right), \\ i &= \overline{1, \tilde{r}_k}, \quad k = \overline{1, d}. \end{aligned} \quad (26)$$

Доведення. Нехай k фіксоване, $0 \leq k < d$. Зображуючи (12) у вигляді

$$x(t_{k+1} - 0) = \hat{X}_k \beta_k + \tilde{x}_k(t_{k+1} - 0) \quad (27)$$

і підставляючи у (2), отримуємо

$$x(t_{k+1} + 0) = S_{k+1} \hat{X}_k \beta_k + \hat{x}_{k+1}. \quad (28)$$

Для задачі Коші (1), (28), $t \in [t_{k+1} + 0; t_{k+2} - 0]$, умова (13) набуває вигляду

$$\hat{A}_{k+1} \beta_k + \tilde{A}_{k+1} \hat{x}_{k+1} + \tilde{f}_{k+1} = 0, \quad (29)$$

звідки при виконанні рівності (18) одержуємо

$$\beta_k = \Theta_{k+1} \tilde{c}_{k+1} - \bar{\Xi}_{k+1} (\tilde{A}_{k+1} \hat{x}_{k+1} + \tilde{f}_{k+1}), \quad (30)$$

$$c_k = \Theta_{k+1,0} \tilde{c}_{k+1} - \bar{\Xi}_{k+1,0} (\tilde{A}_{k+1} \hat{x}_{k+1} + \tilde{f}_{k+1}). \quad (31)$$

Підставивши (30) у (28) і далі у (14), отримаємо

$$\begin{aligned} x(t) &= \tilde{X}_k(t) \tilde{B}_k \left[S_k \hat{X}_{k-1} \left(\Theta_k \tilde{c}_k - \bar{\Xi}_k (\tilde{A}_k \hat{x}_k + \tilde{f}_k) \right) + \hat{x}_k \right] \\ &\quad + \tilde{x}_k(t) + \sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{ki}} \left(\frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{ki}(t) \right) \tilde{\varphi}_{ki}^{(\tilde{s}_{ki}-j+1)}(t) + \sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} \check{\beta}_{ki}(t) \check{\varphi}_{ki}(t), \\ t &\in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k = \overline{1, d}. \end{aligned} \quad (32)$$

З (12), (32) випливає

$$c_k = \tilde{B}_k \left[S_k \hat{X}_{k-1} \left(\Theta_k \tilde{c}_k - \bar{\Xi}_k (\tilde{A}_k \hat{x}_k + \tilde{f}_k) \right) + \hat{x}_k \right], \quad k = \overline{1, d}. \quad (33)$$

Прирівнюючи праві частини (31) і (33), маємо

$$\begin{aligned} &\left[\tilde{B}_k S_k \hat{X}_{k-1} \Theta_k, -\Theta_{k+1,0} \right] \text{col}(\tilde{c}_k, \tilde{c}_{k+1}) \\ &= \tilde{B}_k \left(S_k \hat{X}_{k-1} \bar{\Xi}_k (\tilde{A}_k \hat{x}_k + \tilde{f}_k) - \hat{x}_k \right) - \bar{\Xi}_{k+1,0} (\tilde{A}_{k+1} \hat{x}_{k+1} + \tilde{f}_{k+1}), \quad k = \overline{1, d-1}, \end{aligned} \quad (34)$$

звідки $\bar{A} \bar{c} = \bar{f}$, при виконанні умови (19)

$$\bar{c} = \bar{\Theta} \bar{c} + \bar{\Xi} \bar{f}, \quad \tilde{c}_k = \bar{\Theta}_k \bar{c} + \bar{\Xi}_k \bar{f}. \quad (35)$$

Підставивши (35) у (30), з урахуванням (4)–(6), (12), отримаємо (20), (22), (23). Послідовно підставивши (35) у (30), (28), (14)–(17), одержимо (21), (24)–(26).

Теорему 1 доведено.

Якщо $t_1 = a$ (відрізок $[t_1 + 0; t_1 - 0]$ вироджується в точку), то покладемо $\hat{A}_0 = [A(t_1 - 0), -B(t_1 - 0)]$, $\hat{\Xi}_0 = \hat{A}_0^-$, матриці $\hat{\Theta}_0$ і Υ_0 складемо з елементів базисів $\ker \hat{A}_0$ і $\ker \hat{A}_0^*$, $\hat{\Xi}_0$ і $\hat{\Theta}_0$ зобразимо у вигляді

$$\hat{\Xi}_0 = \text{col}(\Xi_{00}, \Xi_{01}), \quad \hat{\Theta}_0 = \text{col}(\Theta_{00}, \Theta_{01}),$$

де Ξ_{00} і Ξ_{01} — прямокутні матриці розмірності $n \times m$, Θ_{00} і Θ_{01} — $n \times \dim \ker \hat{A}_0$ відповідно, $\hat{X}_0 = \Theta_{00}$, $\tilde{x}(t_1 - 0) = -\Xi_{00} f(t_1 - 0)$, $\beta_0(t_1 - 0) = c_0$ — довільний сталий вектор розмірності $\dim \ker \hat{A}_0$.

Теорема 2. Якщо $a = t_1$, $b > t_d$, існують множини векторів 1)–4), $\alpha_k > 0$, $k = \overline{1, d}$, то система (1), (2) розв'язна в тому і тільки тому випадку, коли виконуються рівності (10), (11), $k = \overline{1, d}$, (18), (19) і

$$\Upsilon_0^* f(t_1 - 0) = 0. \quad (36)$$

При їхньому виконанні система (1), (2) має загальний розв'язок (20)–(26), $k = \overline{1, d}$,

$$\left. \frac{d^j}{dt^j} x(t) \right|_{t=t_1-0} = \Theta_{0j} \left[\Theta_1 (\bar{\Theta}_1 \bar{c} + \bar{\Xi}_1 \bar{f}) - \Xi_1 (\tilde{A}_1 \hat{x}_1 + \tilde{f}_1) \right] - \Xi_{0j} f(t_1 - 0), \quad j = 0, 1. \quad (37)$$

Доведення. Подамо (1) у вигляді

$$\hat{A}_0 \text{col} \left(x(t_1 - 0), \left. \frac{d}{dt} x(t) \right|_{t=t_1-0} \right) + f(t_1 - 0) = 0$$

при $t = t_1 - 0$. При виконанні умови (36) виконуються рівності (27), $k = 0$,

$$\left. \frac{d}{dt} x(t) \right|_{t=t_1-0} = \Theta_{01} c_0 - \Xi_{01} f(t_1 - 0).$$

Далі аналогічно до доведення теореми 1 отримаємо (18)–(26), $k = \overline{1, d}$, (37).

Теорему 2 доведено.

Якщо $t_d = b$ (відрізок $[t_d + 0; t_{d+1} - 0]$ вироджується в точку), то покладемо $\tilde{A}_d = A(t_d + 0)$, $\tilde{f}_d = f(t_d + 0)$, $\hat{A}_d = [\tilde{A}_d S_d \hat{X}_{d-1}, -B(t_d + 0)]$, $\hat{\Xi}_d = \hat{A}_d^-$, матриці $\hat{\Theta}_d$ і Υ_d складемо з елементів базисів $\ker \hat{A}_d$ і $\ker \hat{A}_d^*$, $\hat{\Xi}_d$ і $\hat{\Theta}_d$ подамо у вигляді

$$\hat{\Xi}_d = \text{col}(\Xi_d, \Xi_{d1}), \quad \hat{\Theta}_d = \text{col}(\Theta_d, \Theta_{d1}),$$

де Ξ_d і Θ_d — матриці (5) і (6), Ξ_{d1} і Θ_{d1} — прямокутні матриці розмірності $n \times m$ і $n \times \dim \ker \hat{A}_d$ відповідно, $\tilde{c}_d$ — довільний сталий вектор розмірності $\dim \ker \hat{A}_d$.

Теорема 3. Якщо $a < t_1$, $b = t_d$, існують множини векторів $1) - 4)$, $\alpha_k > 0$, $k = \overline{0, d-1}$, то система (1), (2) розв'язна в тому і тільки тому випадку, коли виконуються рівності (10), (11), $k = \overline{0, d-1}$, (18), (19). При їхньому виконанні вона має загальний розв'язок (20) – (26), $k = \overline{0, d-1}$,

$$x(t_d + 0) = S_d \hat{X}_{d-1} \left[\Theta_d (\bar{\Theta}_d \bar{c} + \bar{\Xi}_d \bar{f}) - \Xi_d (\tilde{A}_d \hat{x}_d + \tilde{f}_d) \right] + \hat{x}_d, \quad (38)$$

$$\left. \frac{d}{dt} x(t) \right|_{t=t_d+0} = \Theta_{d1} (\bar{\Theta}_d \bar{c} + \bar{\Xi}_d \bar{f}) - \Xi_{d1} (\tilde{A}_d \hat{x}_d + \tilde{f}_d). \quad (39)$$

Доведення. Підставивши (28), $k = d - 1$, у (1), отримаємо

$$\hat{A}_d \operatorname{col} \left(\beta_{d-1}, \left. \frac{d}{dt} x(t) \right|_{t=t_d+0} \right) + \tilde{A}_d \hat{x}_d + \tilde{f}_d = 0,$$

при виконанні умови (18), $k = d$, виконуються рівності (30), $k = d - 1$,

$$\left. \frac{d}{dt} x(t) \right|_{t=t_d+0} = \Theta_{d1} \tilde{c}_d - \Xi_{d1} (\tilde{A}_d \hat{x}_d + \tilde{f}_d).$$

Далі аналогічно до доведення теореми 1 одержимо (18) – (26), $k = \overline{0, d-1}$, (38), (39).

Теорему 3 доведено.

Теорема 4. Якщо $a = t_1$, $b = t_d$, існують множини векторів $1) - 4)$, $\alpha_k > 0$, $k = \overline{1, d-1}$, то система (1), (2) розв'язна в тому і тільки тому випадку, коли виконуються рівності (10), (11), $k = \overline{1, d-1}$, (18), (19), (36). При їхньому виконанні вона має загальний розв'язок (20) – (26), $k = \overline{1, d-1}$, (37) – (39).

Наслідок 1. Відповідна до системи (1), (2) однорідна система

$$B(t) \frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad t \in [a; b] \setminus \{t_i, i = \overline{1, d}\}, \quad (40)$$

$$x(t_i + 0) = S_i x(t_i - 0), \quad i = \overline{1, d}, \quad (41)$$

розв'язна при будь-якому розташуванні точок t_1 і t_d на відрізку $[a; b]$ і має загальний розв'язок:

– якщо $a < t_1$, $b > t_d$, то

$$\begin{aligned} x(t) = & \tilde{X}_k(t) \Theta_{k+1,0} \bar{\Theta}_{k+1} \bar{c} + \sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{ki}} \left(\frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{ki}(t) \right) \tilde{\varphi}_{ki}^{(\tilde{s}_{ki}-j+1)}(t) \\ & + \sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} \tilde{\beta}_{ki}(t) \check{\varphi}_{ki}(t), \quad t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k = \overline{0, d-1}, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} x(t) = & \tilde{X}_k(t) \tilde{B}_k S_k \hat{X}_{k-1} \Theta_k \bar{\Theta}_k \bar{c} + \sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{ki}} \left(\frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{ki}(t) \right) \tilde{\varphi}_{ki}^{(\tilde{s}_{ki}-j+1)}(t) \\ & + \sum_{i=1}^{\tilde{r}_k} \tilde{\beta}_{ki}(t) \check{\varphi}_{ki}(t), \quad t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k = \overline{1, d}, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\left. \frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{ki}(t) \right|_{t=t_{k+1}-0} = \tilde{\Theta}_{k+1,i}^{(j)} \bar{\Theta}_{k+1} \bar{c}, \quad j = \overline{0, \tilde{s}_{ki}}, \quad i = \overline{1, \tilde{r}_k}, \quad k = \overline{0, d-1}, \quad (44)$$

$$\check{\beta}_{ki}(t_{k+1}-0) = \check{\Theta}_{k+1,i} \bar{\Theta}_{k+1} \bar{c}, \quad i = \overline{1, \check{r}_k}, \quad k = \overline{0, d-1}, \quad (45)$$

$$\tilde{\beta}_{ki}(t_k+0) = \left(S_k \hat{X}_{k-1} \Theta_k \bar{\Theta}_k \bar{c}, B^*(t_k+0) \hat{\psi}_{ki}^{(1)}(t_k+0) \right), \quad i = \overline{1, \tilde{r}_k}, \quad k = \overline{1, d}, \quad (46)$$

$$\left. \frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{ki}(t) \right|_{t=t_k+0} = \left(S_k \hat{X}_{k-1} \Theta_k \bar{\Theta}_k \bar{c}, L^*(t) \hat{\psi}_{ki}^{(j)}(t) \right) \Big|_{t=t_k+0}, \quad (47)$$

$$j = \overline{1, \tilde{s}_{ki}}, \quad i = \overline{1, \tilde{r}_k}, \quad k = \overline{1, d},$$

$$\check{\beta}_{ki}(t_k+0) = \left(S_k \hat{X}_{k-1} \Theta_k \bar{\Theta}_k \bar{c}, \check{\psi}_{ki}(t_k+0) \right), \quad i = \overline{1, \check{r}_k}, \quad k = \overline{1, d}; \quad (48)$$

– якщо $a = t_1$, $b > t_d$, то (42)–(48), $k = \overline{1, d}$,

$$\left. \frac{d^j}{dt^j} x(t) \right|_{t=t_1-0} = \Theta_{0j} \Theta_1 \bar{\Theta}_1 \bar{c}, \quad j = \overline{0, 1}; \quad (49)$$

– якщо $a < t_1$, $b = t_d$, то (42)–(48), $k = \overline{0, d-1}$,

$$x(t_d+0) = S_d \hat{X}_{d-1} \Theta_d \bar{\Theta}_d \bar{c}, \quad (50)$$

$$\left. \frac{d}{dt} x(t) \right|_{t=t_d+0} = \Theta_{d1} \bar{\Theta}_d \bar{c}; \quad (51)$$

– якщо $a = t_1$, $b = t_d$, то (42)–(48), $k = \overline{1, d-1}$, (49)–(51).

Зауваження 1. Якщо при деякому k :

– $r_k = \hat{r}_k = 0$, $k \in \{1, \dots, d\}$: умови (13), (18), (29) відсутні, вектор β_{k-1} замість (30) можна обрати довільно, слід покласти в (7)

$$\Theta_k = E_{\alpha_{k-1} + \tilde{s}_{k-1} + \tilde{r}_{k-1} + \check{r}_{k-1}}, \quad \Theta_{k0} = [E_{\alpha_{k-1}}, 0_{\alpha_{k-1}, \tilde{s}_{k-1} + \tilde{r}_{k-1} + \check{r}_{k-1}}],$$

у (8)

$$\Xi_k(\tilde{A}_k \hat{x}_k + \tilde{f}_k) = 0_{\alpha_{k-1} + \tilde{s}_{k-1} + \tilde{r}_{k-1} + \check{r}_{k-1}}, \quad \Xi_{k0}(\tilde{A}_k \hat{x}_k + \tilde{f}_k) = 0_{\alpha_{k-1}},$$

у (9) $\tilde{c}_k = \beta_{k-1}$;

– $\alpha_k = \tilde{r}_k = \check{r}_k = 0$, $k \in \{1, \dots, d-1\}$: вектор β_k відсутній, у (18) слід покласти $\Upsilon_{k+1} = E_{s_{k+1} + \tilde{s}_{k+1}}$;

– $\alpha_k = 0$, $k \in \{0, \dots, d-1\}$: вектор c_k (і, відповідно, рівності (31), (33), (34)) відсутній, у (7)–(9) відсутні відповідні блокові рядки; ті вектори $\tilde{c}_i$, які не увійшли у (9), замість (35) можна обрати довільно.

Перейдемо до задачі Коші (1)–(3). Нехай $\tau_0 \in [t_l+0; t_{l+1}-0]$, $l \in \{0, \dots, d\}$. Покладемо

$$\tilde{A} = \text{col} \left[\sum_{i=0}^{s_{l1}-1} I_{s_{l1}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\Psi_{l1}^*(t) A(t)), \dots, \sum_{i=0}^{s_{lr_l}-1} I_{s_{lr_l}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\Psi_{lr_l}^*(t) A(t)), \right. \\ \left. \sum_{i=0}^{\hat{s}_{l1}-1} I_{\hat{s}_{l1}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\tilde{\Psi}_{l1\hat{s}_{l1}}^*(t) A(t)), \dots, \sum_{i=0}^{\hat{s}_{lr_l}-1} I_{\hat{s}_{lr_l}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\tilde{\Psi}_{lr_l\hat{s}_{lr_l}}^*(t) A(t)) \right] \Big|_{t=\tau_0},$$

$$\tilde{f} = \text{col} \left[\sum_{i=0}^{s_{l1}-1} I_{s_{l1}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\Psi_{l1}^*(t)f(t)), \dots, \sum_{i=0}^{s_{lr_l}-1} I_{s_{lr_l}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\Psi_{lr_l}^*(t)f(t)), \right. \\ \left. \sum_{i=0}^{\hat{s}_{l1}-1} I_{\hat{s}_{l1}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\tilde{\Psi}_{l1\hat{s}_{l1}}^*(t)f(t)), \dots, \sum_{i=0}^{\hat{s}_{l\hat{r}_l}-1} I_{\hat{s}_{l\hat{r}_l}}^i \frac{d^i}{dt^i} (\tilde{\Psi}_{l\hat{r}_l\hat{s}_{l\hat{r}_l}}^*(t)f(t)) \right] \Bigg|_{t=\tau_0},$$

$$\tilde{B} = X_l^{-1}(\tau_0)P_l^*(\tau_0)B(\tau_0),$$

$$\tilde{R} = \left[\tilde{B}^*, B^*(\tau_0)\hat{\psi}_{l1}^{(1)}(\tau_0), L^*(\tau_0)\hat{\Psi}_{l1}(\tau_0), \dots, \right. \\ \left. B^*(\tau_0)\hat{\psi}_{l\hat{r}_l}^{(1)}(\tau_0), L^*(\tau_0)\hat{\Psi}_{l\hat{r}_l}(\tau_0), \check{\psi}_{l1}(\tau_0), \dots, \check{\psi}_{l\hat{r}_l}(\tau_0) \right]^*,$$

$$R = \left[\tilde{R}^*, L^*(\tau_0)\Psi_{l1}(\tau_0), \dots, L^*(\tau_0)\Psi_{lr_l}(\tau_0), L^*(\tau_0)\tilde{\Psi}_{l1\hat{s}_{l1}}(\tau_0), \dots, L^*(\tau_0)\tilde{\Psi}_{l\hat{r}_l\hat{s}_{l\hat{r}_l}}(\tau_0) \right]^*$$

— неособлива квадратна матриця згідно з [2].

Якщо $a < t_1$, $b > t_d$, $\tau_0 = a$ або $\tau_0 \in (t_l + 0; t_{l+1} - 0)$, $l \in \{0, \dots, d-1\}$, то покладемо $\hat{A} = \Theta_{l+1,0}\bar{\Theta}_{l+1}$, $\Xi = \hat{A}^-$, матриці Θ і Υ складемо з елементів базисів $\ker \hat{A}$ і $\ker \hat{A}^*$ відповідно, c — довільний сталий вектор розмірності $\dim \ker \hat{A}$.

Теорема 5. Якщо $a < t_1$, $b > t_d$, існують множини векторів 1)–4), $k = \overline{0, d}$, $\tau_0 = a$ або $\tau_0 \in (t_l + 0; t_{l+1} - 0)$, $l \in \{0, \dots, d-1\}$, то для розв'язності задачі Коші (1)–(3) необхідно і достатньо виконання умов (10), (11), (18), (19) і

$$\tilde{A}x_0 + \tilde{f} = 0, \quad (52)$$

$$\Upsilon^* \left[\tilde{B}x_0 - \Theta_{l+1,0}\bar{\Xi}_{l+1}\bar{f} + \Xi_{l+1,0}(\tilde{A}_{l+1}\hat{x}_{l+1} + \tilde{f}_{l+1}) - \int_{t=t_l+0}^{\tau_0} X_l^{-1}(\tau)P_l^*(\tau)f(\tau)d\tau \right] = 0. \quad (53)$$

При їхньому виконанні вона має розв'язки (20)–(26), де

$$\bar{c} = \Theta c + \Xi \left[\tilde{B}x_0 - \Theta_{l+1,0}\bar{\Xi}_{l+1}\bar{f} + \Xi_{l+1,0}(\tilde{A}_{l+1}\hat{x}_{l+1} + \tilde{f}_{l+1}) - \int_{t=t_l+0}^{\tau_0} X_l^{-1}(\tau)P_l^*(\tau)f(\tau)d\tau \right], \quad (54)$$

$$\tilde{\beta}_{li}(\tau_0) = (x_0, B^*(\tau_0)\hat{\psi}_{li}^{(1)}(\tau_0)), \quad i = \overline{1, \tilde{r}_l}, \quad (55)$$

$$\frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{li}(t) \Big|_{t=\tau_0} = \left[(x_0, L^*(t)\hat{\psi}_{li}^{(j)}(t)) \right. \\ \left. + \sum_{u=0}^{j-1} \frac{d^u}{dt^u} (f(t), \hat{\psi}_{li}^{(j-u)}(t)) \right] \Big|_{t=\tau_0}, \quad j = \overline{1, \tilde{s}_{li}}, \quad i = \overline{1, \tilde{r}_l}, \quad (56)$$

$$\check{\beta}_{li}(\tau_0) = (x_0, \check{\psi}_{li}(\tau_0)), \quad i = \overline{1, \check{r}_l}. \quad (57)$$

Доведення. Підставивши (20) у (3) і помноживши зліва на матрицю R , отримаємо (55), (57),

$$\tilde{B}x_0 = \hat{A}\bar{c} + \Theta_{l+1,0}\bar{\Xi}_{l+1}\bar{f} - \Xi_{l+1,0}(\tilde{A}_{l+1}\hat{x}_{l+1} + \tilde{f}_{l+1}) + \int_{t=t_l+0}^{\tau_0} X_l^{-1}(\tau)P_l^*(\tau)f(\tau) d\tau, \quad (58)$$

$$\left(x_0, L^*(t)\psi_{li}^{(j)}(t)\right)\Big|_{t=\tau_0} = -\sum_{u=0}^{j-1} \frac{d^u}{dt^u} \left(f(t), \psi_{li}^{(j-u)}(t)\right)\Big|_{t=\tau_0}, \quad j = \overline{1, s_{li}}, \quad i = \overline{1, r_l}, \quad (59)$$

$$\left(x_0, L^*(t)\hat{\psi}_{li}^{(j)}(t)\right)\Big|_{t=\tau_0} = \left[\frac{d^j}{dt^j} \tilde{\beta}_{li}(t) - \sum_{u=0}^{j-1} \frac{d^u}{dt^u} \left(f(t), \hat{\psi}_{li}^{(j-u)}(t)\right)\right]\Big|_{t=\tau_0}, \quad (60)$$

$$j = \overline{1, \tilde{s}_{li}}, \quad i = \overline{1, \tilde{r}_l},$$

$$\left(x_0, L^*(t)\tilde{\psi}_{li}^{(j)}(t)\right)\Big|_{t=\tau_0} = -\sum_{u=0}^{j-1} \frac{d^u}{dt^u} \left(f(t), \tilde{\psi}_{li}^{(j-u)}(t)\right)\Big|_{t=\tau_0}, \quad j = \overline{1, \hat{s}_{li}}, \quad i = \overline{1, \hat{r}_l}. \quad (61)$$

При виконанні умови (53) з (58) випливає (54). З (59), (61) випливає (52) [2]. З (60) випливає (56).

Теорему 5 доведено.

Якщо $a < t_1$, $b > t_d$, $\tau_0 \in (t_l + 0; t_{l+1} - 0)$, $l \in \{1, \dots, d\}$, або $\tau_0 = b$, то покладемо $\hat{A} = \tilde{B}_l S_l \hat{X}_{l-1} \Theta_l \bar{\Theta}_l$.

Теорема 6. Якщо $a < t_1$, $b > t_d$, існують множини векторів 1)–4), $k = \overline{0, d}$, $\tau_0 \in (t_l + 0; t_{l+1} - 0)$, $l \in \{1, \dots, d\}$, або $\tau_0 = b$, то для розв'язності задачі Коші (1)–(3) необхідно і достатньо виконання рівностей (10), (11), (18), (19), (52) і

$$\Upsilon^* \left\{ \tilde{B}x_0 - \tilde{B}_l S_l \hat{X}_{l-1} [\Theta_l \bar{\Xi}_l \bar{f} - \Xi_l (\tilde{A}_l \hat{x}_l + \tilde{f}_l)] - \tilde{B}_l \hat{x}_l - \int_{t=t_l+0}^{\tau_0} X_l^{-1}(\tau) P_l^*(\tau) f(\tau) d\tau \right\} = 0. \quad (62)$$

При їхньому виконанні вона має розв'язки (20)–(26), (55)–(57), де

$$\bar{c} = \Theta c + \Xi \left\{ \tilde{B}x_0 - \tilde{B}_l S_l \hat{X}_{l-1} [\Theta_l \bar{\Xi}_l \bar{f} - \Xi_l (\tilde{A}_l \hat{x}_l + \tilde{f}_l)] - \tilde{B}_l \hat{x}_l - \int_{t=t_l+0}^{\tau_0} X_l^{-1}(\tau) P_l^*(\tau) f(\tau) d\tau \right\}. \quad (63)$$

Якщо $a < t_1$, $b > t_d$, $\tau_0 = t_{l+1} - 0$, $l \in \{0, \dots, d-1\}$, то покладемо $\hat{A} = \Theta_{l+1} \bar{\Theta}_{l+1}$.

Теорема 7. Якщо $a < t_1$, $b > t_d$, існують множини векторів 1)–4), $k = \overline{0, d}$, $\tau_0 = t_{l+1} - 0$, $l \in \{0, \dots, d-1\}$, то для розв'язності задачі Коші (1)–(3) необхідно і достатньо виконання умов (10), (11), (18), (19), (52) і

$$\Upsilon^* \left[\tilde{R}x_0 - \Theta_{l+1} \bar{\Xi}_{l+1} \bar{f} + \Xi_{l+1} (\tilde{A}_{l+1} \hat{x}_{l+1} + \tilde{f}_{l+1}) \right]$$

$$\begin{aligned}
& - \operatorname{col} \left(\int_{t=t_l+0}^{t_{l+1}-0} X_l^{-1}(\tau) P_l^*(\tau) f(\tau) d\tau, 0_1, \right. \\
& - \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{l1}-1} (I_{\tilde{s}_{l1}}^T)^j \frac{d^j}{dt^j} \left(\hat{\Psi}_{l1}^*(t) f(t) \right), \dots, 0_1, \\
& \left. - \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{l\tilde{r}_l}-1} \left(I_{\tilde{s}_{l\tilde{r}_l}}^T \right)^j \frac{d^j}{dt^j} \left(\hat{\Psi}_{l\tilde{r}_l}^*(t) f(t) \right), 0_{\tilde{r}_l} \right) \bigg|_{t=t_{l+1}-0} \bigg] = 0. \quad (64)
\end{aligned}$$

При їхньому виконанні задача Коші (1)–(3) має розв'язки (20)–(26), де

$$\begin{aligned}
\bar{c} = \Theta c + \Xi \left[\tilde{R} x_0 - \Theta_{l+1} \bar{\Xi}_{l+1} \bar{f} + \Xi_{l+1} \left(\tilde{A}_{l+1} \hat{x}_{l+1} + \tilde{f}_{l+1} \right) \right. \\
- \operatorname{col} \left(\int_{t=t_l+0}^{t_{l+1}-0} X_l^{-1}(\tau) P_l^*(\tau) f(\tau) d\tau, 0_1, - \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{l1}-1} (I_{\tilde{s}_{l1}}^T)^j \frac{d^j}{dt^j} \left(\hat{\Psi}_{l1}^*(t) f(t) \right), \dots, \right. \\
\left. 0_1, - \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{l\tilde{r}_l}-1} \left(I_{\tilde{s}_{l\tilde{r}_l}}^T \right)^j \frac{d^j}{dt^j} \left(\hat{\Psi}_{l\tilde{r}_l}^*(t) f(t) \right), 0_{\tilde{r}_l} \right) \bigg|_{t=t_{l+1}-0} \bigg]. \quad (65)
\end{aligned}$$

Доведення. Підставивши (20), (22), (23) у (3) і помноживши зліва на матрицю R , отримаємо (59), (61) і

$$\begin{aligned}
\tilde{R} x_0 = \hat{A} \bar{c} + \Theta_{l+1} \bar{\Xi}_{l+1} \bar{f} - \Xi_{l+1} \left(\tilde{A}_{l+1} \hat{x}_{l+1} + \tilde{f}_{l+1} \right) \\
+ \operatorname{col} \left(\int_{t=t_l+0}^{t_{l+1}-0} X_l^{-1}(\tau) P_l^*(\tau) f(\tau) d\tau, 0_1, - \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{l1}-1} (I_{\tilde{s}_{l1}}^T)^j \frac{d^j}{dt^j} \left(\hat{\Psi}_{l1}^*(t) f(t) \right), \dots, \right. \\
\left. 0_1, - \sum_{j=0}^{\tilde{s}_{l\tilde{r}_l}-1} \left(I_{\tilde{s}_{l\tilde{r}_l}}^T \right)^j \frac{d^j}{dt^j} \left(\hat{\Psi}_{l\tilde{r}_l}^*(t) f(t) \right), 0_{\tilde{r}_l} \right) \bigg|_{t=t_{l+1}-0},
\end{aligned}$$

звідки при виконанні умови (64) маємо (65). Згідно з [2] із (59), (61) випливає (52).

Теорему 7 доведено.

Якщо $a < t_1$, $b > t_d$, $\tau_0 = t_l + 0$, $l \in \{1, \dots, d\}$, то покладемо $\hat{A} = S_l \hat{X}_{l-1} \Theta_l \bar{\Theta}_l$.

Теорема 8. Якщо $a < t_1$, $b > t_d$, існують множини векторів 1)–4), $k = \bar{0}, \bar{d}$, $\tau_0 = t_l + 0$, $l \in \{1, \dots, d\}$, то для розв'язності задачі Коші (1)–(3) необхідно і достатньо виконання умов (10), (11), (18), (19) і

$$\Upsilon^* \left\{ x_0 - S_l \hat{X}_{l-1} \left[\Theta_l \bar{\Xi}_l \bar{f} - \Xi_l (\tilde{A}_l \hat{x}_l + \tilde{f}_l) \right] - \hat{x}_l \right\} = 0. \quad (66)$$

При їхньому виконанні вона має розв'язки (20)–(26), де

$$\bar{c} = \Theta c + \Xi \left\{ x_0 - S_l \hat{X}_{l-1} \left[\Theta_l \bar{\Xi}_l \bar{f} - \Xi_l (\tilde{A}_l \hat{x}_l + \tilde{f}_l) \right] - \hat{x}_l \right\}. \quad (67)$$

Доведення. Підставивши (21), (24)–(26) у (3), отримаємо

$$x_0 = \hat{A} \bar{c} + S_l \hat{X}_{l-1} \left[\Theta_l \bar{\Xi}_l \bar{f} - \Xi_l (\tilde{A}_l \hat{x}_l + \tilde{f}_l) \right] + \hat{x}_l,$$

звідки при виконанні умови (66) випливає (67).

Теорему 8 доведено.

Якщо $a = t_1$ і $l \in \{1, \dots, d\}$, то розв'язок задачі Коші (1)–(3) будуємо так само, як і в теоремах 2, 4–8. Якщо $l = 0$, то покладемо $\hat{A} = \Theta_{00} \Theta_1 \Theta_1$.

Теорема 9. Якщо $a = t_1$, $b > t_d$, існують множини векторів 1)–4), $k = \overline{1, d}$, $l = 0$, то для розв'язності задачі Коші (1)–(3) необхідно і достатньо виконання умов (10), (11), $k = \overline{1, d}$, (18), (19), (36) і

$$\Upsilon^* \left\{ x_0 - \Theta_{00} \left[\Theta_1 \bar{\Xi}_1 \bar{f} - \Xi_1 (\tilde{A}_1 \hat{x}_1 + \tilde{f}_1) \right] + \Xi_{00} f(t_1 - 0) \right\} = 0. \quad (68)$$

При їхньому виконанні задача Коші (1)–(3) має розв'язки (20)–(26), $k = \overline{1, d}$, (37), де

$$\bar{c} = \Theta c + \Xi \left\{ x_0 - \Theta_{00} \left[\Theta_1 \bar{\Xi}_1 \bar{f} - \Xi_1 (\tilde{A}_1 \hat{x}_1 + \tilde{f}_1) \right] + \Xi_{00} f(t_1 - 0) \right\}. \quad (69)$$

Якщо $b = t_d$ і $l \in \{0, \dots, d-1\}$, то розв'язок задачі Коші (1)–(3) будуємо аналогічно з теоремами 3–8. Якщо $l = d$, то покладемо $\hat{A} = S_d \hat{X}_{d-1} \Theta_d \bar{\Theta}_d$.

Теорема 10. Якщо $a < t_1$, $b = t_d$, існують множини векторів 1)–4), $k = \overline{0, d-1}$, $l = d$, то для розв'язності задачі Коші (1)–(3) необхідно і достатньо виконання умов (10), (11), $k = \overline{0, d-1}$, (18), (19), (66). При їхньому виконанні вона має розв'язки (20)–(26), $k = \overline{1, d-1}$, (38), (39), (67).

Наслідок 2. Для розв'язності задачі Коші (3), (40), (41) для однорідної системи необхідно і достатньо виконання тієї з рівностей

$$\Upsilon^* \tilde{B} x_0 = 0, \quad \Upsilon^* \tilde{R} x_0 = 0, \quad \Upsilon^* x_0 = 0,$$

яка відповідає розташуванню точок t_1 , t_d і τ_0 на відрізку $[a; b]$, і

$$\tilde{A} x_0 = 0.$$

При їхньому виконанні вона має відповідні з розв'язків (42)–(51), де

$$\bar{c} = \Theta c + \Xi \tilde{B} x_0, \quad \bar{c} = \Theta c + \Xi \tilde{R} x_0, \quad \bar{c} = \Theta c + \Xi x_0$$

стосовно до випадку.

Зауваження 2. Якщо $r_l = \hat{r}_l = 0$, то умова (52) відсутня.

Якщо $\alpha_l = 0$, то відповідна з умов (53), (62), (64), (66), (68) відсутня, вектор $\bar{c}$ замість (54), (63), (65), (67), (69) можна вибрати довільно.

Приклад. Нехай у (1)–(3) $m = n = 2$, $d = 2$, $a < t_1 < t_2 < b$, $\tau_0 \in (t_1 + 0; t_2 - 0)$, тобто $l = 1$,

$$B(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix},$$

$$S_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \eta_k = \begin{bmatrix} \eta_{k1} \\ \eta_{k2} \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \quad x_0 = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix},$$

$a_{ij}(t) \in C^\infty[a; b] \setminus t_k$, $i, j, k = 1, 2$, $f_i(t) \in C^\infty[a; b] \setminus t_k$, $i, k = 1, 2$, — дійсні скалярні функції, η_{ki} , $i, k = 1, 2$, x_{0i} , $i = 1, 2$, — дійсні числа, жорданова структура одна й та ж на відрізках $[t_k + 0; t_{k+1} - 0]$, $k = \overline{0, 2}$.

Розглянемо такі випадки [2, 7, 8]:

1. $a_{22}(t) \neq 0 \ \forall t \in [a; b]$. Маємо

$$r_k = 1, \quad s_{k1} = 1, \quad \check{r}_k = \check{r}_k = \tilde{r}_k = \hat{r}_k = 0, \quad \alpha_k = 1,$$

$$\varphi_{k1}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \psi_{k1}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix},$$

$$q_{k1}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix}, \quad p_{k1}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{12}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix},$$

$$X_k(t) = \exp\left(\int_{t_k+0}^t \lambda(z) dz\right), \quad \tilde{X}_k(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix} \exp\left(\int_{t_k+0}^t \lambda(z) dz\right),$$

$$\tilde{x}_k(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix} \int_{t_k+0}^t \exp\left(\int_{\tau}^t \lambda(z) dz\right) \times$$

$$\times (f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)) d\tau - \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22}^{-1}(t)f_2(t) \end{bmatrix}, \quad k = \overline{0, 2},$$

де $\lambda(t) = a_{11}(t) - a_{12}(t)a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t)$ — скалярна функція,

$$\hat{X}_k = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t_{k+1} - 0)a_{22}^{-1}(t_{k+1} - 0) \end{bmatrix} \exp\left(\int_{t_k+0}^{t_{k+1}-0} \lambda(z) dz\right), \quad k = 0, 1,$$

$$\tilde{A}_k = [a_{21}(t_k + 0)a_{22}^{-1}(t_k + 0) \quad 1], \quad \tilde{f}_k = a_{22}^{-1}(t_k + 0)f_2(t_k + 0), \quad \tilde{B}_k = [1 \quad 0],$$

$$\hat{A}_k = \exp\left(\int_{t_{k-1}+0}^{t_k-0} \lambda(z) dz\right), \quad \Xi_k = \exp\left(-\int_{t_{k-1}+0}^{t_k-0} \lambda(z) dz\right), \quad \Theta_k = \Upsilon_k = 0,$$

$$\hat{x}_k = \begin{bmatrix} \eta_{k1} \\ \int_{t_{k-1}+0}^{t_k-0} \exp\left(\int_{\tau}^{t_k-0} \lambda(z) dz\right) (f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)) d\tau + \eta_{k2} \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2,$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\Xi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{\Theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\Upsilon} = 1,$$

$$\begin{aligned} \bar{f} = & -\eta_{11} - \exp\left(-\int_{t_1+0}^{t_2-0} \lambda(z) dz\right) (a_{21}(t_2+0)a_{22}^{-1}(t_2+0)\eta_{21} + \eta_{22} + a_{22}^{-1}(t_2+0)f(t_2+0)) \\ & - \int_{t_1+0}^{t_2-0} \exp\left(-\int_{t_1+0}^{\tau} \lambda(z) dz\right) (f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

Умови (10), (11) відсутні, (18) виконується, з (19) випливає

$$\begin{aligned} \eta_{11} + \exp\left(-\int_{t_1+0}^{t_2-0} \lambda(z) dz\right) (a_{21}(t_2+0)a_{22}^{-1}(t_2+0)\eta_{21} + \eta_{22} + a_{22}^{-1}(t_2+0)f(t_2+0)) \\ + \int_{t_1+0}^{t_2-0} \exp\left(-\int_{t_1+0}^{\tau} \lambda(z) dz\right) (f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)) d\tau = 0. \end{aligned}$$

При її виконанні система (1), (2) має єдиний розв'язок (20), (21):

$$\begin{aligned} x(t) = & -\begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix} \exp\left(-\int_t^{t_1-0} \lambda(z) dz\right) \\ & \times (a_{21}(t_1+0)a_{22}^{-1}(t_1+0)\eta_{11} + \eta_{12} + a_{22}^{-1}(t_1+0)f_2(t_1+0)) \\ & - \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix} \int_t^{t_1-0} \exp\left(-\int_t^{\tau} \lambda(z) dz\right) \\ & \times (f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)) d\tau - \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22}^{-1}(t)f_2(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [t_0+0; t_1-0], \quad (70) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t) = & \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix} \exp\left(\int_{t_k+0}^t \lambda(z) dz\right) \eta_{k1} \\ & + \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(t)a_{22}^{-1}(t) \end{bmatrix} \int_{t_k+0}^t \exp\left(\int_{\tau}^t \lambda(z) dz\right) (f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)) d\tau \\ & - \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22}^{-1}(t)f_2(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [t_k+0; t_{k+1}-0], \quad k = 1, 2, \quad (71) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= [a_{21}(\tau_0)a_{22}^{-1}(\tau_0) \quad 1], \quad \tilde{f} = a_{22}^{-1}(\tau_0)f_2(\tau_0), \\ \tilde{B} &= \left[\exp\left(-\int_{t_1+0}^{\tau_0} \lambda(z)dz\right) \quad 0 \right], \quad \hat{A} = \Xi = 0, \quad \Theta = \Upsilon = 1,\end{aligned}$$

умови (53) і (62) співпадають, з (52), (53), (62) випливає

$$\begin{aligned}x_0 &= \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(\tau_0)a_{22}^{-1}(\tau_0) \end{bmatrix} \exp\left(\int_{t_1+0}^{\tau_0} \lambda(z)dz\right) \eta_{11} + \begin{bmatrix} 1 \\ -a_{21}(\tau_0)a_{22}^{-1}(\tau_0) \end{bmatrix} \\ &\times \int_{t_1+0}^{\tau_0} \exp\left(-\int_{\tau}^{\tau_0} \lambda(z)dz\right) (f_1(\tau) - a_{12}(\tau)a_{22}^{-1}(\tau)f_2(\tau)) d\tau - \begin{bmatrix} 0 \\ a_{22}^{-1}(\tau_0)f_2(\tau_0) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Якщо ця рівність виконується, то задача Коші (1) – (3) має єдиний розв’язок (20), (21), (54), (63), що співпадає з (70), (71).

2. $a_{22}(t) \equiv 0$, $a_{12}(t) \neq 0$, $a_{21}(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a; b]$. Маємо

$$\begin{aligned}r_k &= 1, \quad s_{k1} = 2, \quad \check{r}_k = \check{r}_k = \tilde{r}_k = \hat{r}_k = 0, \quad \alpha_k = 0, \\ \varphi_{k1}^{(1)}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \varphi_{k1}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} a_{12}(t) \\ a_{12}^{-1}(t) \frac{d}{dt} a_{12}(t) - a_{11}(t) \end{bmatrix}, \\ \psi_{k1}^{(1)}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ a_{12}^{-1}(t)a_{21}^{-1}(t) \end{bmatrix}, \quad \psi_{k1}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} a_{12}^{-1}(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{x}_k(t) &= \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(t)f_2(t) \\ a_{12}^{-1}(t) \left(a_{11}(t)a_{21}^{-1}(t)f_2(t) - f_1(t) - \frac{d}{dt} (a_{21}^{-1}(t)f_2(t)) \right) \end{bmatrix}, \quad k = \overline{0, 2}, \\ \tilde{A}_k &= \begin{bmatrix} a_{11}(t_k+0)a_{12}^{-1}(t_k+0) + \frac{d}{dt} a_{12}^{-1}(t) \Big|_{t=t_k+0} & 1 \\ a_{12}^{-1}(t_k+0) & 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{f}_k &= \begin{bmatrix} a_{12}^{-1}(t_k+0)f_1(t_k+0) + \frac{d}{dt} (a_{12}^{-1}(t)a_{21}^{-1}(t)f_2(t)) \Big|_{t=t_k+0} \\ a_{12}^{-1}(t_k+0)a_{21}^{-1}(t_k+0)f_2(t_k+0) \end{bmatrix}, \quad \Upsilon_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \hat{x}_k &= \begin{bmatrix} \eta_{k1} \\ -a_{21}^{-1}(t_k-0)f_2(t_k-0) + \eta_{k2} \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2,\end{aligned}$$

умови (10), (11), (19) відсутні, (18) з урахуванням зауваження 1 має вигляд

$$\begin{aligned} & \left[\begin{aligned} & \left(a_{11}(t_k + 0)a_{12}^{-1}(t_k + 0) + \frac{d}{dt} a_{12}^{-1}(t) \Big|_{t=t_k+0} \right) \eta_{k1} - a_{21}^{-1}(t_k - 0)f_2(t_k - 0) + \eta_{k2} \\ & a_{12}^{-1}(t_k + 0)\eta_{k1} \end{aligned} \right] \\ & + \left[\begin{aligned} & a_{12}^{-1}(t_k + 0)f_1(t_k + 0) + \frac{d}{dt} (a_{12}^{-1}(t)a_{21}^{-1}(t)f_2(t)) \Big|_{t=t_k+0} \\ & a_{12}^{-1}(t_k + 0)a_{21}^{-1}(t_k + 0)f_2(t_k + 0) \end{aligned} \right] = 0, \quad k = 1, 2. \end{aligned}$$

Якщо ці рівності виконуються, то система (1), (2) має єдиний розв'язок (20), (21):

$$x(t) = \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(t)f_2(t) \\ a_{12}^{-1}(t) \left(a_{11}(t)a_{21}^{-1}(t)f_2(t) - f_1(t) - \frac{d}{dt} (a_{21}^{-1}(t)f_2(t)) \right) \end{bmatrix}, \quad (72)$$

$$t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k = \overline{0, 2},$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11}(\tau_0)a_{12}^{-1}(\tau_0) + \frac{d}{dt} a_{12}^{-1}(t) \Big|_{t=\tau_0} & 1 \\ a_{12}^{-1}(\tau_0) & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{f} = \begin{bmatrix} a_{12}^{-1}(\tau_0)f_1(\tau_0) + \frac{d}{dt} (a_{12}^{-1}(t)a_{21}^{-1}(t)f_2(t)) \Big|_{t=\tau_0} \\ a_{12}^{-1}(\tau_0)a_{21}^{-1}(\tau_0)f_2(\tau_0) \end{bmatrix},$$

умови (53), (62) відсутні, з (52) випливає

$$x_0 = \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(\tau_0)f_2(\tau_0) \\ a_{12}^{-1}(\tau_0) \left(a_{11}(\tau_0)a_{21}^{-1}(\tau_0)f_2(\tau_0) - f_1(\tau_0) - \frac{d}{dt} (a_{21}^{-1}(t)f_2(t)) \Big|_{t=\tau_0} \right) \end{bmatrix}.$$

Якщо ця рівність виконується, то задача Коші (1)–(3) має єдиний розв'язок (20), (21), що співпадає з (72).

3. $a_{22}(t) \equiv 0$, $a_{12}(t) \neq 0$, $a_{21}(t) \equiv 0 \quad \forall t \in [a; b]$. Маємо

$$\tilde{r}_k = 1, \quad \tilde{s}_{k1} = 1, \quad \check{r}_k = 1, \quad \check{r}_k = r_k = \hat{r}_k = 0, \quad \alpha_k = 0,$$

$$\tilde{\varphi}_{k1}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\varphi}_{k1}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} a_{12}(t) \\ a_{12}^{-1}(t) \frac{d}{dt} a_{12}(t) - a_{11}(t) \end{bmatrix}, \quad \check{\psi}_{k1}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\psi}_{k1}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} a_{12}^{-1}(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \check{\varphi}_{k1}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}_k(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -a_{12}^{-1}(t)f_1(t) \end{bmatrix}, \quad k = \overline{0, 2},$$

$$\hat{X}_k = \begin{bmatrix} a_{12}(t_{k+1} - 0) & 0 \\ a_{12}^{-1}(t_{k+1} - 0) \frac{d}{dt} a_{12}(t) \Big|_{t=t_{k+1}-0} - a_{11}(t_{k+1} - 0) & 1 \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1,$$

$$\hat{x}_k = \begin{bmatrix} \eta_{k1} \\ \eta_{k2} \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2,$$

умови (10), (18), (19) відсутні, (11) має вигляд

$$f_2(t) \equiv 0. \quad (73)$$

Якщо ця рівність виконується, то система (1), (2) має загальний розв'язок (20)–(22), (24), (25) з урахуванням зауваження 1:

$$x(t) = \begin{bmatrix} a_{12}(t)\tilde{\beta}_{k1}(t) \\ a_{12}^{-1}(t)\tilde{\beta}_{k1}(t) \frac{d}{dt} a_{12}(t) - a_{11}(t)\tilde{\beta}_{k1}(t) - a_{12}^{-1}(t)f_1(t) + \frac{d}{dt} \tilde{\beta}_{k1}(t) \end{bmatrix}, \quad (74)$$

$$t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k = \overline{0, 2},$$

$$\tilde{\beta}_{k1}(t_k + 0) = a_{12}^{-1}(t_k + 0)\eta_{k1}, \quad k = 1, 2, \quad (75)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\beta}_{k1}(t) \Big|_{t=t_k+0} &= \left(a_{11}(t_k + 0)a_{12}^{-1}(t_k + 0) - a_{12}^{-2}(t_k + 0) \frac{d}{dt} a_{12}(t) \Big|_{t=t_k+0} \right) \eta_{k1} \\ &+ a_{12}(t_k - 0)\tilde{\beta}_{k1}(t_k - 0) + \eta_{k2} + a_{12}^{-1}(t_1 + 0)f_1(t_k + 0), \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (76)$$

Умови (52), (53), (62) відсутні, задача Коші (1)–(3) має розв'язки (20)–(22), (24), (25), (56) з урахуванням зауваження 2, що співпадають з (74)–(76), де

$$\tilde{\beta}_{11}(\tau_0) = a_{12}^{-1}(\tau_0)x_{01}, \quad (77)$$

$$\frac{d}{dt} \tilde{\beta}_{11}(t) \Big|_{t=\tau_0} = a_{11}(\tau_0)a_{12}^{-1}(\tau_0)x_{01} + x_{02} - a_{12}^{-2}(\tau_0)x_{01} \frac{d}{dt} a_{12}(t) \Big|_{t=\tau_0} + a_{12}^{-1}(\tau_0)f_1(\tau_0). \quad (78)$$

4. $a_{22}(t) \equiv 0$, $a_{12}(t) \equiv 0$, $a_{21}(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a; b]$. **Маємо**

$$\check{r}_k = 1, \quad \hat{r}_k = 1, \quad \hat{s}_{k1} = 1, \quad \tilde{r}_k = r_k = \check{r}_k = 0, \quad \alpha_k = 0,$$

$$\check{\varphi}_{k1}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\psi}_{k1}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\psi}_{k1}^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} a_{21}(t) \\ -a_{11}(t) - a_{21}^{-1}(t) \frac{d}{dt} a_{21}(t) \end{bmatrix}, \quad \hat{\varphi}_{k1}^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} a_{21}^{-1}(t) \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\check{\psi}_{k1}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{x}_k(t) = \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(t)f_2(t) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k = \overline{0, 2}, \quad \hat{X}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1,$$

$$\tilde{A}_k = [a_{21}(t_k + 0) \quad 0], \quad \tilde{f}_k = f_2(t_k + 0), \quad \hat{A}_k = \Xi_k = 0, \quad \Theta_k = \Upsilon_k = 1,$$

$$\hat{x}_k = \begin{bmatrix} \eta_{k1} \\ -a_{21}^{-1}(t_k - 0)f_2(t_k - 0) + \eta_{k2} \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2,$$

$\tilde{c}_k$, $k = 1, 2$, — скалярні сталі, умови (11), (19) відсутні, (10), (18) мають вигляд

$$a_{21}(t)f_1(t) - a_{11}(t)f_2(t) - a_{21}^{-1}(t)f_2(t) \frac{d}{dt} a_{21}(t) + \frac{d}{dt} f_2(t) \equiv 0,$$

$$a_{21}(t_k + 0)\eta_{k1} + f_2(t_k + 0) = 0, \quad k = 1, 2.$$

Якщо ці рівності виконуються, то система (1), (2) має загальний розв'язок (20), (21), (23), (26) з урахуванням зауваження 1:

$$x(t) = \begin{bmatrix} -a_{21}^{-1}(t)f_2(t) \\ \check{\beta}_{k1}(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k = \overline{0, 2}, \quad (79)$$

$$\check{\beta}_{k1}(t_{k+1} - 0) = \tilde{c}_{k+1}, \quad k = 0, 1, \quad (80)$$

$$\check{\beta}_{k1}(t_k + 0) = -a_{21}^{-1}(t_k - 0)f_2(t_k - 0) + \eta_{k2}, \quad k = 1, 2, \quad (81)$$

$$\tilde{A} = [a_{21}(\tau_0) \quad 0], \quad \tilde{f} = f_2(\tau_0),$$

умови (53), (62) відсутні, з (52) випливає

$$x_{01} = -a_{21}^{-1}(\tau_0)f_2(\tau_0).$$

Якщо ця рівність виконується, то задача Коші (1)–(3) має розв'язки (20), (21), (23), (26), (57) з урахуванням зауваження 2, що співпадають з (79)–(81), де

$$\check{\beta}_{11}(\tau_0) = x_{02}. \quad (82)$$

5. $a_{22}(t) \equiv 0$, $a_{12}(t) \equiv 0$, $a_{21}(t) \equiv 0 \quad \forall t \in [a; b]$. Маємо

$$\check{r}_k = 1, \quad \check{r}_k = 1, \quad \tilde{r}_k = r = \hat{r}_k = 0, \quad \alpha_k = 1,$$

$$\check{\varphi}_{k1}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \check{\psi}_{k1}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \check{\varphi}_{k1}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\check{\psi}_{k1}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad q_{k1}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad p_{k1}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$X_k(t) = \exp \left(\int_{t_k+0}^t a_{11}(z) dz \right), \quad \tilde{X}_k(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \exp \left(\int_{t_k+0}^t a_{11}(z) dz \right),$$

$$\tilde{x}_k(t) = \begin{bmatrix} \int_{t_k+0}^t \exp \left(\int_{\tau}^t a_{11}(z) dz \right) f_1(\tau) d\tau \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k = \overline{0, 2},$$

$$\hat{X}_k = \begin{bmatrix} \exp \left(\int_{t_k+0}^{t_{k+1}-0} a_{11}(z) dz \right) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad k = 0, 1,$$

$$\begin{aligned}\tilde{B}_k &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Theta_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \hat{x}_k &= \begin{bmatrix} \eta_{k1} \\ \int_{t_{k-1}+0}^{t_k-0} \exp\left(\int_{\tau}^{t_k-0} a_{11}(z) dz\right) f_1(\tau) d\tau + \eta_{k2} \end{bmatrix}, \\ \Xi_k(\tilde{A}_k \hat{x}_k + \tilde{f}_k) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \\ \bar{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{f} = -\eta_{11}, \quad \bar{\Xi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{\Theta} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\Upsilon} = 0, \quad \bar{c} = \begin{bmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \\ \bar{c}_3 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

умови (10), (18) відсутні, (19) виконується, (11) співпадає з (73). Якщо ця рівність виконується, то система (1), (2) має загальний розв'язок (20), (21), (23), (26) з урахуванням зауваження 1:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \exp\left(\int_{t_0+0}^t a_{11}(z) dz\right) \bar{c}_1 + \int_{t_0+0}^t \exp\left(\int_{\tau}^t a_{11}(z) dz\right) f_1(\tau) d\tau \\ \check{\beta}_{01}(t) \end{bmatrix}, \quad (83)$$

$$t \in [t_0 + 0; t_1 - 0],$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} \exp\left(\int_{t_k+0}^t a_{11}(z) dz\right) \eta_{k1} + \int_{t_k+0}^t \exp\left(\int_{\tau}^t a_{11}(z) dz\right) f_1(\tau) d\tau \\ \check{\beta}_{k1}(t) \end{bmatrix}, \quad (84)$$

$$t \in [t_k + 0; t_{k+1} - 0], \quad k = 1, 2,$$

$$\check{\beta}_{k1}(t_{k+1} - 0) = \bar{c}_{k+2}, \quad k = 0, 1, \quad (85)$$

$$\check{\beta}_{11}(t_1 + 0) = \exp\left(\int_{t_0+0}^{t_1-0} a_{11}(z) dz\right) \bar{c}_1 + \int_{t_0+0}^{t_1-0} \exp\left(\int_{\tau}^{t_1-0} a_{11}(z) dz\right) f_1(\tau) d\tau + \eta_{12}, \quad (86)$$

$$\check{\beta}_{21}(t_2 + 0) = \exp\left(\int_{t_1+0}^{t_2-0} a_{11}(z) dz\right) \eta_{11} + \int_{t_1+0}^{t_2-0} \exp\left(\int_{\tau}^{t_2-0} a_{11}(z) dz\right) f_1(\tau) d\tau + \eta_{22}, \quad (87)$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \exp\left(-\int_{t_1+0}^{\tau_0} a_{11}(z) dz\right) & 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Xi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Upsilon = 1, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix},$$

умова (52) відсутня, (53) і (62) співпадають, з них випливає

$$x_{01} = \exp\left(\int_{t_1+0}^{\tau_0} a_{11}(z) dz\right) \eta_{11} + \int_{t_1+0}^{\tau_0} \exp\left(\int_{\tau}^{\tau_0} a_{11}(z) dz\right) f_1(\tau) d\tau.$$

Якщо ця рівність виконується, то задача Коші (1)–(3) має розв'язки (20), (21), (23), (26), (54), (57), (63) з урахуванням зауваження 2, що співпадають з (82)–(87) із заміною $\bar{c}_i$ на c_i , $i = \overline{1, 3}$.

Автор заявляє про відсутність конфлікту інтересів і спеціального фінансування цієї роботи. Всі необхідні дані містяться в статті.

Література

1. А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець, *Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями*, Вища шк., Київ (2000).
2. М. А. Єлишевич, *Задача Коши для системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка с прямоугольными матрицами*, Нелін. коливання, **16**, № 2, 173–190 (2013); **English translation:** J. Math. Sci. (N.Y.), **198**, № 3, 260–278, (2014).
3. А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк, *Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием*, Вища шк., Київ (1987).
4. С. М. Чуйко, Е. В. Чуйко, *Обобщенный оператор Грина задачи Коши с импульсным воздействием*, Доп. НАН України, № 6, 43–47 (1999).
5. І. І. Король, *Інтегрування вироджених диференціальних систем з виродженням в імпульсних умовах*, Наук. вісн. Ужгород. ун-ту, вип. 19, 42–52 (2009).
6. М. А. Єлишевич, *Задача Коші для системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку з виродженою матрицею при похідних і імпульсною дією у фіксовані моменти часу*, Нелін. коливання, **25**, № 4, 325–340 (2022); **English translation:** J. Math. Sci. (N.Y.), **277**, 240–257 (2023).
7. М. А. Єлишевич, *Задача Коші для системи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь першого порядку з прямокутними матрицями і однією імпульсною дією у фіксований момент часу*, Нелін. коливання, **27**, № 1, 64–81 (2024).
8. М. А. Єлишевич, *Некоторые свойства жордановых наборов векторов матрицы относительно оператора, содержащего дифференцирование*, Журн. обчисл. прикл. математики, № 2(108), 119–134 (2012).

Одержано 07.03.24,
після доопрацювання — 14.05.24