DOI: 10.3842/nosc.v27i2.1468

УДК 517.929

ПРО ФАКТОРИЗАЦІЙНІ ЛАНЦЮЖКИ І РІЗНИЦЕВЕ РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА – де ФРІЗА

Денис Бельський

Інститут математики НАН України,
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна,
e-mail: oiop120@gmail.com

The Bäcklund transformations and some particular solutions of factorization chains from quantum mechanics, special cases of the Korteweg – de Vries difference equation and the connection between them are studied.

Вивчаються перетворення Беклунда та деякі часткові розв'язки факторизаційних ланцюжків із квантової механіки, окремі випадки різницевого рівняння Кортевега – де Фріза і зв'язок між ними.

1. Вступ. Запишемо рівняння, між якими існує тісний зв'язок [1]:

$$\frac{d}{dz}\left(v(z)+qv(qz)\right)-\left(v(z)-qv(qz)\right)^2=\mu, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dz}\left(f(z)+qf(qz)\right)+f^2(z)-q^2f^2(qz)=\mu\left(q^2-1\right); \tag{2}$$

$\{z,q,\mu\}\subset\mathbb{C}$. А саме: якщо $v(z)$ — розв'язок рівняння (1), то функція $f(z)=qv(qz)-v(z)$ буде розв'язком рівняння (2). Навпаки, якщо $f(z)$ — розв'язок рівняння (2) і $|q|<1$, то функція

$$v(z)=-\sum_{n=0}^{+\infty}q^nf(q^nz)$$

буде розв'язком рівняння (1) за умови, що цей ряд сходиться та допускає почленне диференціювання. Зокрема, якщо $|q|<1$, то цей зв'язок дозволяє встановити взаємно однозначну відповідність між аналітичними розв'язками рівнянь (1) і (2) за допомогою рівності $f(0)=(q-1)v(0)$, при цьому радіуси збіжності відповідних розв'язків збігаються. Рівняння (1) описує автомодельну редукцію

$$v_j(z)=q^jv\left(q^jz\right),\quad \beta_j=\mu q^{2j}$$

нескінченного ланцюжка

$$v'_{j+1}+v'_j=(v_{j+1}-v_j)^2+\beta_j,\quad u_j=2v'_j. \tag{3}$$

Цей ланцюжок пов'язаний рівностями

$$f_j=v_{j+1}-v_j \tag{4}$$

з факторизаційним ланцюжком Інфельда [2]

$$f'_{j+1}+f'_j=f^2_{j+1}-f^2_j+\beta_{j+1}-\beta_j; \tag{5}$$

останній, зі свого боку, еквівалентний послідовності перетворень Дарбу

$$u_j = -f_j' + f_j^2 + \beta_j, u_{j+1} = u_j + 2f_j'$$

для операторів Шредінгера $L_j = -D^2 + u_j,\ D \overset{\mathrm{df}}{=} \dfrac{d}{dz}$ [3]. У випадку

$$v_{j+N} = v_j + C_{j+N}, \quad f_{j+N} = f_j, \quad \beta_{j+N} = \beta_j, \tag{6}$$

де N — натуральне число, C_{j+N} — деяка стала величина (далі символи C_n позначають деякі константи); ланцюжок (3) і скінченний ланцюжок (5) описують нерухомі точки названих перетворень Дарбу та їхніх суперпозицій. У фізичній літературі ці нерухомі точки називають автомодельними потенціалами, їхній детальний огляд можна знайти в [4, 5]. Рівняння (2) описує автомодельну редукцію

$$f_j(z) = q^j f\big(q^j z\big), \qquad \mu_j = \mu\big(q^2 - 1\big)q^{2j}, \qquad \mu_j = \beta_{j+1} - \beta_j$$

факторизаційного ланцюжка (5).

У цій статті буде зроблено кілька зауважень щодо перетворень Беклунда для факторизаційних ланцюжків (3), (5). Також розглянемо окремі випадки нескінченного ланцюжка

$$c_j' = c_j(c_{j+1} - c_{j-1}), \tag{7}$$

який, як і ланцюжок Тоди, є різницевим аналогом рівняння Кортевега – де Фріза (рівняння КдФ) [6, 7]. У випадку $c_j > 0$ ця система, зокрема, виникає при вивченні тонкої структури спектрів ленгмюрівських коливань у плазмі, тому іноді її називають ленгмюрівським ланцюжком [6].

2. Перетворення Беклунда. Перетворення Беклунда між факторизаційними ланцюжками з різними параметрами вперше було опубліковано у [8], при цьому у [1] зазначено, що для його отримання використовували принцип нелінійної суперпозиції. Виведення цього перетворення опубліковано у [9]. Слідуючи позначенням і термінології з [9], трохи доповнимо наведені там міркування. З леми 2 [9] отримуємо рівність

$$f_{j+1}(z|\mu_j) = -f_{j+2}(z|\mu_j, \mu_{j+1}) + \frac{\mu_{j+1}}{f_{j+2}(z|\mu_j + \mu_{j+1}, -\mu_{j+1}) - f_{j+2}(z|\mu_j, \mu_{j+1})}$$

і, підставляючи її у рівняння

$$f_{j+2}'(z|\mu_j, \mu_{j+1}) + f_{j+1}'(z|\mu_j) = \mu_{j+1} + f_{j+2}^2(z|\mu_j, \mu_{j+1}) - f_{j+1}^2(z|\mu_j),$$

одержуємо тотожність

$$\begin{aligned} &-f_{j+2}'(z|\mu_j + \mu_{j+1}, -\mu_{j+1}) - f_{j+2}^2(z|\mu_j + \mu_{j+1}, -\mu_{j+1}) \\ &\qquad\qquad = -f_{j+2}'(z|\mu_j, \mu_{j+1}) - f_{j+2}^2(z|\mu_j, \mu_{j+1}) - \mu_{j+1}. \end{aligned}$$

З останньої рівності та рівняння

$$f_{j+3}'(z) + f_{j+2}'(z|\mu_j, \mu_{j+1}) = f_{j+3}^2(z) - f_{j+2}^2(z|\mu_j, \mu_{j+1}) + \mu_{j+2}$$

отримуємо співвідношення

$$\begin{aligned} f'_{j+3}(z) - f^2_{j+3}(z) &= -f'_{j+2}(z|\mu_j + \mu_{j+1}, -\mu_{j+1}) - f^2_{j+2}(z|\mu_j + \mu_{j+1}, -\mu_{j+1}) + \mu_{j+2} + \mu_{j+1} \\ &= -f'_{j+2}(z|\mu_j, \mu_{j+1}) - f^2_{j+2}(z|\mu_j, \mu_{j+1}) + \mu_{j+2}, \end{aligned}$$

тобто

$$f'_{j+3}(z) + f'_{j+2}(z|\mu_j + \mu_{j+1}, -\mu_{j+1}) = f^2_{j+3}(z) - f^2_{j+2}(z|\mu_j + \mu_{j+1}, -\mu_{j+1}) + \mu_{j+2} + \mu_{j+1}.$$

Таким чином, отримали параметри для другого ланцюжка: $\tilde{\mu}_j = \mu_j + \mu_{j+1}$, $\tilde{\mu}_{j+1} = -\mu_{j+1}$, $\tilde{\mu}_{j+2} = \mu_{j+2} + \mu_{j+1}$ (пор. з (6) у [8]). Легко помітити, що повторне застосування перетворення Беклунда до пари функцій з тими самими номерами дає вихідні параметри $\tilde{\tilde{\mu}}_j = \tilde{\mu}_j + \tilde{\mu}_{j+1} = \mu_j$, $\tilde{\tilde{\mu}}_{j+1} = -\tilde{\mu}_{j+1} = \mu_{j+1}$, $\tilde{\tilde{\mu}}_{j+2} = \tilde{\mu}_{j+2} + \tilde{\mu}_{j+1} = \mu_{j+2}$ і приводить до початкової пари функцій.

Навіть у періодичному випадку (6) перехід (4) від ланцюжка v_j до ланцюжка f_j не завжди оборотний. Проте перетворення Беклунда для ланцюжка (3) [1] випливає з перетворення Беклунда для ланцюжка (5) [8, 9] і навпаки. При цьому у [1] зазначено, що для його отримання використано відомий принцип нелінійної суперпозиції, який у цьому випадку означає комутативність двох перетворень Дарбу з різними параметрами. У цій статті останнє зауваження буде дещо деталізоване з позначеннями та термінологією з § 3 [9]. Для цього запишемо першу рівність у (3) таким чином:

$$\frac{d}{dz}\,(v_{j+1} - v_j) - (v_{j+1} - v_j)^2 = \beta_j - 2v'_j.$$

Нехай ϕ — це ненульовий розв’язок рівняння

$$\phi'' = -\big(\beta_j - 2v'_j\big)\phi,$$

тоді можна вибрати

$$v_{j+1} - v_j = -\frac{\phi'}{\phi}. \tag{8}$$

Використовуючи останню рівність і визначення функції ϕ, запишемо рівняння

$$v'_{j+2} + v'_{j+1} = (v_{j+2} - v_{j+1})^2 + \beta_{j+1}$$

у вигляді тотожності

$$\frac{d}{dz}\,(v_{j+2} - v_{j+1}) - (v_{j+2} - v_{j+1})^2 = \beta_{j+1} - \beta_j - \big(\beta_j - 2v'_j\big) - 2\left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2.$$

Нехай ψ — це ненульовий розв’язок рівняння

$$\psi'' = -\left\{\beta_{j+1} - \beta_j - \big(\beta_j - 2v'_j\big) - 2\left(\frac{\phi'}{\phi}\right)^2\right\}\psi, \tag{9}$$

тоді можна вибрати

$$v_{j+2} - v_{j+1} = -\frac{\psi'}{\psi},$$

і, враховуючи (8), отримуємо рівність

$$v_{j+2} = v_j - \frac{\phi'}{\phi} - \frac{\psi'}{\psi}. \tag{10}$$

Використовуючи визначення функції ϕ і рівняння (20) у [9], можна вважати, що $V_0(x) = 2v_j'(x),\ \varepsilon = \beta_j$ і $\phi(x) = \psi_0(x, \beta_j)$. Тоді за допомогою функції $W(x, \beta_j)$ з [9] можна записати рівняння (9) у вигляді

$$\psi'' = \big[V_0(x) - 2W'(x, \beta_j) - \beta_{j+1}\big]\psi.$$

Порівнюючи останнє рівняння з рівнянням (21) у [9], можна покласти $E = \beta_{j+1}$ і $\psi = \psi_1(x, \beta_{j+1})$. У нових позначеннях рівності (8) і (10) набувають вигляду

$$v_{j+1}(x|\beta_j) = v_j(x) - W(x, \beta_j),$$

$$v_{j+2}(x|\beta_j, \beta_{j+1}) = v_j(x) - W(x, \beta_j) - \frac{\psi_1'(x, \beta_{j+1})}{\psi_1(x, \beta_{j+1})}.$$

Тоді з рівності (26) у [9] випливає тотожність

$$v_{j+2}(x|\beta_j, \beta_{j+1}) = v_{j+2}(x|\beta_{j+1}, \beta_j),$$

а рівність (27) із [9] приводить до співвідношення

$$\{v_{j+1}(x|\beta_{j+1}) - v_{j+1}(x|\beta_j)\}[v_j(x) - v_{j+2}(x|\beta_j, \beta_{j+1})] = \beta_{j+1} - \beta_j.$$

Дві останні рівності — це перетворення Беклунда для ланцюжка (3), яке можна перевірити підстановкою у відповідні рівняння. Зауважимо, що перетворення Беклунда для ланцюжка (3) виводиться простіше, ніж аналогічне перетворення для ланцюжка (5) у [9].

3. Диференціально-різницеві рівняння. Крім автомодельних редукцій факторизаційних ланцюжків, які приводять до диференціальних рівнянь (1), (2) із лінійним відхиленням аргументу, існують аналогічні прості редукції ланцюжків (3), (5), які приводять до диференціальних рівнянь із постійним відхиленням аргументу. А саме, рівняння

$$v'(z+h) + v'(z) = \big[v(z+h) - v(z)\big]^2 + \beta \tag{11}$$

описує автомодельну редукцію

$$v_j(z) = v(z + jh), \quad \beta_j = \beta$$

факторизаційного ланцюжка (3). За допомогою [10] можна легко перевірити, що функція

$$v(z) = -\zeta(z - z_0) + h^{-1}\zeta(h)(z - z_0) + C_0, \tag{12}$$

де ζ — функція Вейєрштраса, z_0 — довільна постійна, є розв'язком рівняння (11) за умови, що $\beta = 2h^{-1}\zeta(h) - \wp(h)$.

Аналогічно, рівняння (5.5) у [5]

$$f'(z+h) + f'(z) = f^2(z+h) - f^2(z) + \eta \tag{13}$$

описує автомодельну редукцію

$$f_j(z) = f(z + jh), \quad \beta_{j+1} - \beta_j = \eta$$

ланцюжка (5). У разі $\eta = 0$ з (11) отримуємо частковий розв'язок [5] рівняння (13):

$$f(z) = v(z+h) - v(z) = -\frac{1}{2}\,\frac{\wp'(z - z_0) - \wp'(h)}{\wp(z - z_0) - \wp(h)}, \tag{14}$$

де функцію $v(z)$ визначено в (12).

У той же час для ланцюжка (3) у випадку $\beta_j = 0$, ланцюжка (5) у випадку $\beta_j = C_1$ і ланцюжка (7) існують прості розв'язки вигляду $\dfrac{C_2}{z - C_3} + C_4$, наприклад, $v_j(z) = \dfrac{\gamma_j}{z - C_3} + C_4$, де $\gamma_j = -\dfrac{(j-1)j}{2}$; $\gamma_{2n+1} = a$, $\gamma_{2n} = \dfrac{2a - 1 \pm \sqrt{1 - 8a}}{2}$, a — довільна постійна, $n \in \mathbb{Z}$; або $\gamma_{2n} = a$, $\gamma_{2n+1} = \dfrac{2a - 1 \pm \sqrt{1 - 8a}}{2}$. Більш складний солітонний розв'язок ланцюжка (7) знайдено в [11].

4. Різницеве рівняння КдФ. Нескінченний ланцюжок (7) можна звести до кінцевої системи рівнянь, якщо припустити виконання рівності

$$c_{j+N} = c_j,$$

де $N \in \mathbb{N}$. Алгоритм обчислення перших інтегралів цієї системи запропоновано в [11].

У випадку $N = 3$ з умов $f_{j+3} = f_j$, $\beta_{j+3} = \beta_j$ у (5) отримуємо систему рівнянь

$$g_j' = g_j(g_{j+1} - g_{j-1}) + \mu_j, \tag{15}$$

де $g_j = f_{j+1} + f_j$, $\mu_j = \beta_{j+1} - \beta_j$, $g_{j+3} = g_j$, $\mu_{j+3} = \mu_j$, яка еквівалентна ланцюжку (5). Припустимо, що $\mu_j = \mu\bigl(q^2 - 1\bigr)q^{2j}$, $q^3 = 1$, $q \neq 1$, і виберемо $f_j(z) = q^j f\bigl(q^j z\bigr)$, де $f(z)$ — деякий розв'язок рівняння (2). Легко перевірити [9, 12], що для параметра $\mu = -\wp(\xi)$, де еліптична функція Вейєрштраса $\wp(z|w, w')$ [10] така, що решітки $\Omega = \{w, w'\}$ і $\Omega' = \{qw, qw'\}$ збігаються, ξ — довільне число з області визначення $\wp$, частковими розв'язками рівняння (2) є функції

$$F_1(z) = F_1(z, \xi) = \frac{1}{2}\,\frac{\wp'\left(z + \dfrac{\xi}{q-1}\right) - \wp'(\xi)}{\wp\left(z + \dfrac{\xi}{q-1}\right) - \wp(\xi)},$$

$$F_2(z) = F_2(z, \xi) = -\frac{1}{2}\,\frac{\wp'\left(z + \dfrac{q}{1-q}\,\xi\right) - \wp'(\xi)}{\wp\left(z + \dfrac{q}{1-q}\,\xi\right) - \wp(\xi)},$$

$$F_1(z, \xi) = F_2(z, -\xi).$$

Виберемо $f(z) = F_{1,2}(z, \xi)$. Якщо виконується умова $\wp(\xi) = 0$, то $\mu_j = 0$ і система (15) для вибраних функцій g_j набуває вигляду

$$g_j' = g_j(g_{j+1} - g_{j-1}) \tag{16}$$

або з урахуванням рівності $g_{j+1}(z) = qg_j(qz)$

$$g_j'(z) = g_j(z)\bigl[qg_j(qz) - q^{-1}g_j\bigl(q^{-1}z\bigr)\bigr].$$

Для визначення нулів функції $\wp(z|\omega, \omega')$ оберемо $q = e^{2\pi i/3}$, $2\omega = 1$, $2\omega' = q$, тобто 1 і q — це два періоди функції $\wp$. З формули 18.2.2 у [10] випливає рівність $\wp(qz) = q\wp(z)$; тоді

$$\wp\left(\frac{q}{q-1}\right) = q\wp\left(\frac{1}{q-1}\right) = q\wp\left(\frac{1}{q-1} + 1\right) = q\wp\left(\frac{q}{q-1}\right),$$

$$\wp\left(\pm\frac{q}{q-1}\right)=0.$$

Повертаючись до раніше визначеної функції $\wp(z|w,w')$, виберемо число t таке, що $w=t\omega$ і $w'=t\omega'$. Тоді за допомогою формули 18.2.2 у [10] отримуємо

$$\wp\big(tz|w,w'\big)=\wp\big(tz|t\omega,t\omega'\big)=t^{-2}\wp\big(z|\omega,\omega'\big).$$

Таким чином, функція $\wp(z|w,w')$ дорівнює нулю у точках $\xi=\pm t\,\dfrac{q}{1-q}$ при $q=e^{2\pi i/3}$.

Отже, якщо вибрати для визначеності $f(z)=F_2(z,\xi)$ і підставити у тотожність

$$\begin{aligned}g_0(z)&=f_0(z)+f_1(z)=f(z)+qf(qz)=F_2(z)+qF_2(qz)\\&=\zeta\left(z+\frac{q}{1-q}\,\xi\right)-\zeta\left(z+\frac{\xi}{q(1-q)}\right)+\zeta(\xi)+\zeta\left(\frac{\xi}{q}\right)\end{aligned}$$

нулі $\xi=\pm t\,\dfrac{q}{1-q}$, $q=e^{2\pi i/3}$, функції $\wp(z|w,w')$, то отримаємо *два розв'язки системи (16).*

Якщо у ланцюжку (5) вибрати $f_j(z)=f(z+jh)$, де $f(z)$ — розв'язок (14) із параметром $h=\dfrac{1}{3}T$, T — деякий період відповідної функції $\wp$, то *розв'язком системи (16) будуть функції*

$$\begin{gathered}g_0(z)=f_0(z)+f_1(z)=f(z)+f(z+h)=\zeta(z-z_0)+2\zeta(h)-\zeta(z+2h-z_0),\\g_{j+1}(z)=g_j(z+h),\quad g_{j+3}=g_j.\end{gathered}$$

Цей розв'язок також можна отримати з більш загального розв'язку (35) у [4] факторизаційного ланцюжка (5). Для цього у розв'язку (35) із [4] треба вибрати $z_{j+3}=z_j$, $z_m=\pm\dfrac{2}{3}T$, $z_k=z_l=\mp\dfrac{1}{3}T$, T — деякий період відповідної функції $\wp$, $\{m,k,l\}=\{0,1,2\}$. Збіг отриманих розв'язків системи (16) перевіряємо за допомогою формули 18.2.19 у [10]. Побудована функція g_0 також задовольняє рівняння

$$g_0'(z)=g_0(z)(g_0(z+h)-g_0(z-h)).$$

Систему (16) за умови $g_{j+3}=g_j$ вивчали у [13], проте побудовані вище розв'язки цієї системи доповнюють згадану роботу. У цій статті результати з [13] будуть трохи деталізовані та доповнені корисним посиланням на більш пізню статтю [14]. Для цього запишемо систему (16) при $N=3$ у розгорнутому вигляді

$$\begin{aligned}g_1'&=g_1(g_2-g_3),\\g_2'&=g_2(g_3-g_1),\\g_3'&=g_3(g_1-g_2).\end{aligned}\tag{17}$$

Ця система має два прості перші інтеграли. Очевидно, що виконується рівність

$$g_1+g_2+g_3=-2C,\tag{18}$$

де C — деяка стала. Якщо домножити рівняння для $g_j,\ j = 1, 2, 3,$ на добуток $g_{j-1}g_{j+1}$ і підсумувати три рівняння, то отримаємо рівність $\dfrac{d}{dz}\,(g_1g_2g_3) = 0$ або

$$g_1g_2g_3 = B, \tag{19}$$

де B — деяка стала.

Використовуючи один перший інтеграл (18), виведемо відносно складне рівняння для шуканих функцій, яке однак близьке за формою до четвертого рівняння Пенлеве. Для цього з першого рівняння системи (17) і тотожності (18) одержуємо

$$g_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{g_1'}{g_1} - g_1\right) - C.$$

З другого рівняння системи (17), тотожності (18) і останньої рівності випливає

$$\frac{1}{2}\left(\frac{g_1''g_1 - (g_1')^2}{g_1^2} - g_1'\right) = g_2' = g_2(g_3 - g_1) = g_2(-2(C + g_1) - g_2)$$

$$= C^2 + \frac{3}{4}\,(g_1)^2 + 2Cg_1 - \frac{1}{2}\,g_1' - \frac{(g_1')^2}{4(g_1)^2},$$

$$g_1'' = \frac{1}{2g_1}\big(g_1'\big)^2 + \frac{3}{2}\,g_1^3 + 4Cg_1^2 + 2C^2g_1.$$

Внаслідок симетрії системи (17) аналогічні рівняння можуть бути отримані для всіх шуканих функцій (пор. [8]).

Тепер, використовуючи два перші інтеграли системи (17), виведемо простіше рівняння (1.26) з [13] для шуканих функцій. Для цього з тотожностей (18) і (19) маємо

$$g_2 = -\frac{1}{2}\left[(2C + g_1) \pm \sqrt{(2C + g_1)^2 - 4\,\frac{B}{g_1}}\,\right], \tag{20}$$

$$g_3 = \frac{1}{2}\left[-(2C + g_1) \pm \sqrt{(2C + g_1)^2 - 4\,\frac{B}{g_1}}\,\right]. \tag{21}$$

Подвійний знак $\pm$ у двох верхніх рівностях не зовсім коректний, оскільки вибір потрібного знака однозначно визначається початковими значеннями шуканих функцій, проте його поставили, щоб прибрати з тексту деякі деталі. Далі подібні знаки можна пояснити аналогічно.

Із двох останніх рівностей і першого рівняння системи (17) отримуємо

$$g_1' = \mp g_1\sqrt{(2C + g_1)^2 - 4\,\frac{B}{g_1}}. \tag{22}$$

Знову внаслідок симетрії системи (17) аналогічні рівняння можна отримати для всіх шуканих функцій (пор. (1.26) у [13]). Але для обчислення розв'язків простіше використовувати формули (20) і (21), у яких квадратний корінь визначаємо за допомогою рівності (22).

З (22) випливає тотожність

$$\mp \int\limits_{g_1(z_0)}^{g_1(z)} \frac{dt}{t\sqrt{(2C+t)^2 - 4\,\dfrac{B}{t}}} = z - z_0. \tag{23}$$

У випадку $C = 0$, $B \neq 0$ підінтегральний вираз в останній рівності є неінтегрованим біноміальним диференціалом (див. п. 279 у [15]), проте в подальшому для цього випадку знайдемо частковий розв'язок. Припустимо, що $g_1(z_0) > 0$, і запишемо (23) у вигляді

$$\mp(z - z_0) = \int\limits_{g_1(z_0)}^{g_1(z)} \frac{dt}{\sqrt{t[t(2C+t)^2 - 4B]}}.$$

Вважаючи $4B = t_0(2C+t_0)^2$, з останньої тотожності отримуємо

$$\mp(z - z_0) = \int\limits_{g_1(z_0)}^{g_1(z)} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - t_0 t)[t^2 + (4C+t_0)t + (2C+t_0)^2]}}. \tag{24}$$

Проілюструємо дослідження цього інтеграла кількома прикладами. І, щоб спростити подальші обчислення, оберемо спочатку $C = 0$ і $t_0 < 0$, тоді при зроблених припущеннях вираз під квадратним коренем у формулах (20) – (22) набиратиме додатних значень, а рівність (24) набуде вигляду

$$\mp(z - z_0) = \int\limits_{g_1(z_0)}^{g_1(z)} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - t_0 t)\big(t^2 + t_0 t + t_0^2\big)}}.$$

Виконуючи в цьому інтегралі заміну змінних (13) у п. 284 з [15], отримуємо

$$\mp(z - z_0) = \frac{2h-1}{|t_0|} \int\limits_{\frac{(1-h)|t_0| - g_1(z_0)}{g_1(z_0) - h|t_0|}}^{\frac{(1-h)|t_0| - g_1(z)}{g_1(z) - h|t_0|}} \frac{ds}{\sqrt{(a_1 + b_1 s^2)(a_2 + b_2 s^2)}},$$

де $h = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$, $a_1 = ((1-h)+1)(1-h) < 0$, $b_1 = (h+1)h > 0$, $a_2 = (1-h)^2 - (1-h) + 1 > 0$, $b_2 = h^2 - h + 1 > 0$. Виберемо для визначеності $0 < g_1(z_0) < h|t_0|$, тоді для нижньої межі відрізка інтегрування виконується нерівність

$$\frac{(1-h)|t_0| - g_1(z_0)}{g_1(z_0) - h|t_0|} > \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{\frac{|a_1|}{b_1}} = s_2,$$

де s_2 — додатний корінь полінома $a_1 + b_1 s^2$; і, таким чином, обидва квадратні поліноми в підінтегральній функції додатні на відрізку інтегрування. Запишемо останній інтеграл таким чином:

$$\mp(z - z_0) = \frac{2h-1}{|t_0|} \int\limits_{s_2}^{\frac{(1-h)|t_0| - g_1(z)}{g_1(z) - h|t_0|}} \frac{ds}{\sqrt{(a_1 + b_1 s^2)(a_2 + b_2 s^2)}}$$

$$-\frac{2h-1}{|t_0|}\int\limits_{s_2}^{\frac{(1-h)|t_0|-g_1(z_0)}{g_1(z_0)-h|t_0|}}\frac{ds}{\sqrt{(a_1+b_1s^2)(a_2+b_2s^2)}}.$$

Інтеграли такого типу детально вивчались у [14]. Застосовуючи згадану роботу, а також інтегральні формули для функцій, обернених до еліптичних функцій Якобі, які можна знайти, зокрема, в електронній бібліотеці математичних функцій (DLMF), з останньої тотожності знаходимо

$$\frac{(1-h)|t_0|-g_1(z)}{g_1(z)-h|t_0|}=\sqrt{\frac{|a_1|}{b_1}}\,\mathrm{nc}\Bigg(\mp\frac{|t_0|\sqrt{a_2b_1-a_1b_2}}{2h-1}(z-z_0)$$
$$+\mathrm{arcnc}\left(\sqrt{\frac{b_1}{|a_1|}}\,\frac{(1-h)|t_0|-g_1(z_0)}{g_1(z_0)-h|t_0|},\sqrt{\frac{a_2b_1}{a_2b_1-a_1b_2}}\right),\sqrt{\frac{a_2b_1}{a_2b_1-a_1b_2}}\Bigg).$$

Замість функції nc можна використати функцію ds [14].

Тепер виберемо $C=-2t_0$ і $t_0<0$, тоді вираз (24) набуває вигляду

$$\mp(z-z_0)=\int\limits_{g_1(z_0)}^{g_1(z)}\frac{dt}{\sqrt{(t^2-t_0t)\big(t^2-7t_0t+9t_0^2\big)}}.$$

Як і в попередньому прикладі, виконуючи в цьому інтегралі заміну змінних (13) з п. 284 [15], отримуємо

$$\mp(z-z_0)=\frac{\sqrt{3}}{|t_0|}\int\limits_{\frac{(h_1-\sqrt{3})|t_0|-g_1(z_0)}{g_1(z_0)-h_1|t_0|}}^{\frac{(h_1-\sqrt{3})|t_0|-g_1(z)}{g_1(z)-h_1|t_0|}}\frac{ds}{\sqrt{(a_1+b_1s^2)(a_2+b_2s^2)}},$$

де $h_1=\sqrt{3}\,\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\approx-0{,}633,\ h_1-\sqrt{3}\approx-2{,}365,\ a_1=\big((h_1-\sqrt{3})+1\big)\big(h_1-\sqrt{3}\big)\approx3{,}228,$ $b_1=(h_1+1)h_1\approx-0{,}232,\ a_2=\big(h_1-\sqrt{3}\big)^2+7\big(h_1-\sqrt{3}\big)+9\approx-1{,}962,\ b_2=h_1^2+7h_1+9\approx$ $4{,}969$; *у цьому та наступних прикладах позначення коефіцієнтів поліномів у підінтегральній функції залишені такими ж, як і в попередньому прикладі,* щоб спростити застосування роботи [14]. Враховуючи, що $g_1(z_0)>0$, в останньому інтегралі зручно зробити заміну змінних $s=-\tau$; тоді межі відрізка інтегрування стануть додатними величинами; в результаті одержуємо

$$\mp(z-z_0)=\frac{\sqrt{3}}{|t_0|}\int\limits_{-\frac{(h_1-\sqrt{3})|t_0|-g_1(z)}{g_1(z)-h_1|t_0|}}^{-\frac{(h_1-\sqrt{3})|t_0|-g_1(z_0)}{g_1(z_0)-h_1|t_0|}}\frac{d\tau}{\sqrt{(a_1+b_1\tau^2)(a_2+b_2\tau^2)}}.$$

У поліномів в підінтегральній функції є додатні корні

$$0{,}627\approx\tau_2=\sqrt{\frac{|a_2|}{b_2}}<\tau_1=\sqrt{\frac{a_1}{|b_1|}}\approx3{,}730.$$

При цьому для верхньої межі відрізка інтегрування виконується нерівність

$$\tau_2 < 1 < -\frac{\big(h_1-\sqrt{3}\,\big)|t_0| - g_1(z_0)}{g_1(z_0) - h_1|t_0|} = \frac{\sqrt{3}|t_0|}{g_1(z_0) - h_1|t_0|} + 1 < \frac{1+\sqrt{3}}{\big|1-\sqrt{3}\big|} = \tau_1.$$

Отже, обидва квадратні поліноми в підінтегральній функції додатні на відрізку інтегрування. Запишемо останній інтеграл у вигляді різниці

$$\mp(z-z_0) = \frac{\sqrt{3}}{|t_0|} \int\limits_{-\frac{(h_1-\sqrt{3})|t_0|-g_1(z)}{g_1(z)-h_1|t_0|}}^{\tau_1} \frac{d\tau}{\sqrt{(a_1+b_1\tau^2)(a_2+b_2\tau^2)}}$$

$$- \frac{\sqrt{3}}{|t_0|} \int\limits_{-\frac{(h_1-\sqrt{3})|t_0|-g_1(z_0)}{g_1(z_0)-h_1|t_0|}}^{\tau_1} \frac{d\tau}{\sqrt{(a_1+b_1\tau^2)(a_2+b_2\tau^2)}}.$$

Враховуючи приблизні значення коефіцієнтів $a_{1,2},\ b_{1,2}$ і застосовуючи [14], а також інтегральні формули для функцій, обернених до еліптичних функцій Якобі (DLMF), з останньої рівності маємо

$$-\frac{\big(h_1-\sqrt{3}\,\big)|t_0| - g_1(z)}{g_1(z) - h_1|t_0|} = \sqrt{\frac{a_1}{|b_1|}}\mathrm{dn}\Bigg(\mp\frac{|t_0|\sqrt{a_1b_2}}{\sqrt{3}}(z-z_0)$$

$$+ \operatorname{arcdn}\Bigg(-\sqrt{\frac{|b_1|}{a_1}}\frac{\big(h_1-\sqrt{3}\,\big)|t_0| - g_1(z_0)}{g_1(z_0) - h_1|t_0|},$$

$$\sqrt{1-\frac{a_2b_1}{a_1b_2}}\Bigg),\ \sqrt{1-\frac{a_2b_1}{a_1b_2}}\Bigg).$$

Розглянемо випадок $2C = t_0,\ t_0 < 0$. Тоді тотожність (24) набуває вигляду

$$\mp(z-z_0) = \int\limits_{g_1(z_0)}^{g_1(z)} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-t_0t)\big(t^2+3t_0t+4t_0^2\big)}}.$$

Виконуючи в цьому інтегралі заміну змінних (13) з п. 284 у [15], отримуємо

$$\mp(z-z_0) = \frac{2\sqrt{2}}{|t_0|} \int\limits_{\frac{(h_2-2\sqrt{2})|t_0|-g_1(z_0)}{g_1(z_0)-h_2|t_0|}}^{\frac{(h_2-2\sqrt{2})|t_0|-g_1(z)}{g_1(z)-h_2|t_0|}} \frac{ds}{\sqrt{(a_1+b_1s^2)(a_2+b_2s^2)}},$$

де $h_2 = 1+\sqrt{2},\ a_1 = \big(\big(h_2-2\sqrt{2}\,\big)+1\big)\big(h_2-2\sqrt{2}\,\big) < 0,\ b_1 = (h_2+1)h_2 > 0,\ a_2 = \big(h_2-2\sqrt{2}\,\big)^2 - 3\big(h_2-2\sqrt{2}\,\big)+4 > 0,\ b_2 = h_2^2 - 3h_2 + 4 > 0$. Знову виберемо для визначеності $0 < g_1(z_0) < h_2|t_0|$, тоді для нижньої межі відрізка інтегрування виконується нерівність

$$\frac{\big(h_2-2\sqrt{2}\,\big)|t_0| - g_1(z_0)}{g_1(z_0) - h_2|t_0|} > \frac{\big|1-\sqrt{2}\big|}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{|a_1|}{b_1}} = \hat{s}_2,$$

де $\hat{s}_2$ — додатний корінь полінома $a_1 + b_1 s^2$. Тому обидва квадратні поліноми в підінтегральній функції додатні на відрізку інтегрування. Запишемо останній інтеграл у вигляді різниці

$$\mp(z - z_0) = \frac{2\sqrt{2}}{|t_0|} \int\limits_{\frac{(h_2 - 2\sqrt{2})|t_0| - g_1(z_0)}{g_1(z_0) - h_2|t_0|}}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{(a_1 + b_1 s^2)(a_2 + b_2 s^2)}} - \frac{2\sqrt{2}}{|t_0|} \int\limits_{\frac{(h_2 - 2\sqrt{2})|t_0| - g_1(z)}{g_1(z) - h_2|t_0|}}^{+\infty} \frac{ds}{\sqrt{(a_1 + b_1 s^2)(a_2 + b_2 s^2)}}.$$

Застосовуючи [14], а також інтегральні формули для функцій, обернених до еліптичних функцій Якобі (DLMF), з останньої рівності знаходимо

$$\frac{\big(h_2 - 2\sqrt{2}\big)|t_0| - g_1(z)}{g_1(z) - h_2|t_0|} = \sqrt{\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{b_1 b_2}}\, ds\Bigg(\pm\frac{1}{2\sqrt{2}}|t_0|\sqrt{a_2 b_1 - a_1 b_2}(z - z_0) + \operatorname{arcds}\Bigg(\sqrt{\frac{b_1 b_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2}}\frac{\big(h_2 - 2\sqrt{2}\big)|t_0| - g_1(z_0)}{g_1(z_0) - h_2|t_0|}, \sqrt{\frac{a_2 b_1}{a_2 b_1 - a_1 b_2}}\Bigg), \sqrt{\frac{a_2 b_1}{a_2 b_1 - a_1 b_2}}\Bigg).$$

Замість функції ds можна використати функцію nc [14].

На закінчення розглянемо найпростіший випадок $2C = -t_0$. Тоді $B = 0$ і рівність (24) набуває вигляду

$$\mp(z - z_0) = \int\limits_{g_1(z_0)}^{g_1(z)} \frac{dt}{|t^2 - t_0 t|}.$$

Виконуючи в цьому інтегралі заміну змінних $t = s + \dfrac{t_0}{2}$, отримуємо

$$\mp(z - z_0) = \int\limits_{g_1(z_0) - \frac{t_0}{2}}^{g_1(z) - \frac{t_0}{2}} \frac{ds}{\left|s^2 - \dfrac{t_0^2}{4}\right|}.$$

Виберемо $g_1(z_0) > |t_0|$, тоді поліном в підінтегральній функції набуває додатних значень на відрізку інтегрування. Запишемо останній інтеграл у вигляді різниці інтегралів

$$\mp(z - z_0) = \int\limits_{g_1(z_0) - \frac{t_0}{2}}^{+\infty} \frac{ds}{s^2 - \dfrac{t_0^2}{4}} - \int\limits_{g_1(z) - \frac{t_0}{2}}^{+\infty} \frac{ds}{s^2 - \dfrac{t_0^2}{4}}.$$

Застосовуючи результати з [14] і § 4.6 у [10], з останньої тотожності знаходимо

$$g_1(z) = \frac{|t_0|}{2}\coth\left(\pm\frac{|t_0|}{2}(z - z_0) + \operatorname{arccoth}\left(\frac{2}{|t_0|}\left[g_1(z_0) - \frac{t_0}{2}\right]\right)\right) + \frac{t_0}{2}.$$

Тепер розглянемо випадок $N = 4$ і запишемо систему (16) за умови $g_{j+4} = g_j$ у розгорнутому вигляді

$$\begin{aligned} g_1' &= g_1(g_2 - g_4), \\ g_2' &= g_2(g_3 - g_1), \\ g_3' &= g_3(g_4 - g_2), \\ g_4' &= g_4(g_1 - g_3). \end{aligned} \tag{25}$$

У системи (25), як і в попередньому випадку $N = 3$, є перший інтеграл

$$g_1 + g_2 + g_3 + g_4 = -2C, \tag{26}$$

де C — деяка константа. Використовуючи цей перший інтеграл, одержуємо відносно складне рівняння для функції g_1, яке внаслідок симетрії системи буде однаковим для всіх шуканих функцій. Для цього із системи (25) і тотожності (26) виводимо рівності

$$\begin{aligned} \left(\frac{g_1'}{g_1}\right)' &= g_2' - g_4' = (g_2 + g_4)(g_3 - g_1) \\ &= (-2C - [g_3 + g_1])(g_3 - g_1) = -2Cg_3 + 2Cg_1 - g_3^2 + g_1^2, \end{aligned} \tag{27}$$

$$g_3^2 = -2Cg_3 + 2Cg_1 + g_1^2 - \left(\frac{g_1'}{g_1}\right)',$$

$$g_3 g_3' = -Cg_3' + Cg_1' + g_1 g_1' - \frac{1}{2}\left(\frac{g_1'}{g_1}\right)''.$$

З першого та третього рівняння системи (25), а також із двох останніх тотожностей отримуємо

$$\frac{g_1'}{g_1} = -\frac{g_3'}{g_3} = -\frac{g_3 g_3'}{g_3^2} = -\frac{Cg_3' - Cg_1' - g_1 g_1' + \frac{1}{2}\left(\frac{g_1'}{g_1}\right)''}{2Cg_3 - 2Cg_1 - g_1^2 + \left(\frac{g_1'}{g_1}\right)'},$$

$$g_3' = -\frac{g_1'}{g_1} g_3, \qquad \frac{g_1'}{g_1} = -\frac{Cg_3' - Cg_1' - g_1 g_1' + \frac{1}{2}\left(\frac{g_1'}{g_1}\right)''}{2Cg_3 - 2Cg_1 - g_1^2 + \left(\frac{g_1'}{g_1}\right)'}. \tag{28}$$

З останньої рівності випливає

$$Cg_3' = -2\,\frac{g_1'}{g_1}\,Cg_3 + \frac{g_1'}{g_1}\left[2Cg_1 + g_1^2 - \left(\frac{g_1'}{g_1}\right)'\right] + Cg_1' + g_1 g_1' - \frac{1}{2}\left(\frac{g_1'}{g_1}\right)''.$$

Припустимо, що $C \neq 0$. Тоді, враховуючи першу тотожність у (28), із останнього співвідношення отримуємо

$$g_3 = 3g_1 + C^{-1}\left[2g_1^2 - \left(\frac{g_1'}{g_1}\right)' - \frac{1}{2}\,\frac{g_1}{g_1'}\left(\frac{g_1'}{g_1}\right)''\right].$$

Підставляючи цей вираз для функції g_3 у (27), отримуємо рівняння

$$\left(\frac{g_1'}{g_1}\right)' = -\left\{2C + 4g_1 + C^{-1}\left[2g_1^2 - \left(\frac{g_1'}{g_1}\right)' - \frac{1}{2}\,\frac{g_1}{g_1'}\left(\frac{g_1'}{g_1}\right)''\right]\right\} \times \left\{2g_1 + C^{-1}\left[2g_1^2 - \left(\frac{g_1'}{g_1}\right)' - \frac{1}{2}\,\frac{g_1}{g_1'}\left(\frac{g_1'}{g_1}\right)''\right]\right\}.$$

Щоб спростити рівняння для функції g_1, припустимо, що $C = 0$. Тоді з другої рівності у (28) одержуємо

$$\left\{g_1^2\left[-g_1^2 + \left(\frac{g_1'}{g_1}\right)'\right]\right\}' = 0,$$

тобто

$$g_1^2\left[-g_1^2 + \left(\frac{g_1'}{g_1}\right)'\right] = D, \tag{29}$$

де D — деяка стала. Оскільки $C = 0$, із (27) випливає

$$g_1^2\left[-g_1^2 + \left(\frac{g_1'}{g_1}\right)'\right] = -g_1^2 g_3^2 = D. \tag{30}$$

Виберемо $\{g_1(z_0), g_3(z_0)\} \subset \mathbb{R}\backslash\{0\}$, тоді $D < 0$. Не применшуючи загальності міркувань, можна вважати, що $g_1(z_0) > 0$, тому що в іншому випадку заміна змінних $g_1 = -v$ у рівнянні (29) приводить до такого ж рівняння для функції v.

Зробимо в рівнянні (29) заміну змінних $u = \ln(g_1)$:

$$u'' = e^{2u} + De^{-2u},$$

$$\big(u'(z)\big)^2 = e^{2u(z)} - De^{-2u(z)} + \big(u'(z_0)\big)^2 - \big(e^{2u(z_0)} - De^{-2u(z_0)}\big). \tag{31}$$

За допомогою першого рівняння системи (25) і рівностей (26), (30) отримуємо

$$\begin{aligned} A &\overset{\text{df}}{=} \big(u'(z_0)\big)^2 - \big(e^{2u(z_0)} - De^{-2u(z_0)}\big) \\ &= 4g_2(z_0)\big(g_2(z_0) + g_1(z_0) + g_3(z_0)\big) + 2g_1(z_0)g_3(z_0) \\ &\geq -\big[g_1^2(z_0) + g_3^2(z_0)\big]. \end{aligned} \tag{32}$$

Запишемо рівняння (31) у нових позначеннях таким чином:

$$\frac{du(t)}{\sqrt{e^{2u(t)} - De^{-2u(t)} + A}} = \pm dt;$$

проінтегруємо його на відрізку від z_0 до z:

$$\pm(z - z_0) = \int\limits_{g_1(z_0)}^{g_1(z)} \frac{ds}{\sqrt{s^4 + As^2 - D}}. \tag{33}$$

Знову проілюструємо дослідження цього інтеграла кількома прикладами. Для початку припустимо, що $g_2(z_0) = 0$ або $g_2(z_0) = -[g_1(z_0) + g_3(z_0)]$. Тоді з урахуванням визначення сталої A і рівності (30) тотожність (33) набуває вигляду

$$\pm(z - z_0) = \int\limits_{g_1(z_0)}^{g_1(z)} \frac{ds}{|s^2 + g_1(z_0)g_3(z_0)|}. \tag{34}$$

Виберемо $g_3(z_0)$ таке, що $g_3(z_0) < 0$ і $|g_3(z_0)| < g_1(z_0)$, та запишемо останній інтеграл у вигляді різниці інтегралів

$$\pm(z - z_0) = \int\limits_{g_1(z_0)}^{+\infty} \frac{ds}{s^2 + g_1(z_0)g_3(z_0)} - \int\limits_{g_1(z)}^{+\infty} \frac{ds}{s^2 + g_1(z_0)g_3(z_0)}.$$

Застосовуючи [14] і формули 4.6.3, 4.6.6 у [10], із останньої тотожності знаходимо

$$g_1(z) = \sqrt{g_1(z_0)|g_3(z_0)|}\coth\left(\mp\sqrt{g_1(z_0)|g_3(z_0)|}\,(z - z_0) + \operatorname{arccoth}\left(\frac{g_1(z_0)}{\sqrt{g_1(z_0)|g_3(z_0)|}}\right)\right).$$

Тепер виберемо $g_3(z_0)$ таке, що $g_3(z_0) < 0$ і $|g_3(z_0)| > g_1(z_0)$, та запишемо інтеграл у тотожності (34) у вигляді різниці інтегралів

$$\pm(z - z_0) = \int\limits_{0}^{g_1(z)} \frac{ds}{g_1(z_0)|g_3(z_0)| - s^2} - \int\limits_{0}^{g_1(z_0)} \frac{ds}{g_1(z_0)|g_3(z_0)| - s^2}.$$

Застосовуючи [14] і формулу 4.6.3 у [10], із останньої рівності знаходимо

$$g_1(z) = \sqrt{g_1(z_0)|g_3(z_0)|}\tanh\left(\pm\sqrt{g_1(z_0)|g_3(z_0)|}(z - z_0) + \operatorname{arctanh}\left(\frac{g_1(z_0)}{\sqrt{g_1(z_0)|g_3(z_0)|}}\right)\right).$$

Нарешті розглянемо найпростіший випадок $g_3(z_0) > 0$ і запишемо інтеграл із (34) у вигляді різниці інтегралів

$$\pm(z - z_0) = \int\limits_{0}^{g_1(z)} \frac{ds}{s^2 + g_1(z_0)g_3(z_0)} - \int\limits_{0}^{g_1(z_0)} \frac{ds}{s^2 + g_1(z_0)g_3(z_0)}.$$

З останньої тотожності знаходимо

$$g_1(z) = \sqrt{g_1(z_0)g_3(z_0)}\tan\left(\pm\sqrt{g_1(z_0)g_3(z_0)}(z - z_0) + \arctan\left(\sqrt{\frac{g_1(z_0)}{g_3(z_0)}}\right)\right).$$

Розглянемо більш загальні випадки. Припустимо, що $g_3(z_0) > 0$ і $g_1(z_0) \neq g_3(z_0)$; тоді з (32) випливає, що параметр A за допомогою величини $g_2(z_0)$ може приймати значення $-kg_1(z_0)g_3(z_0)$, де коефіцієнт k визначається з нерівності

$$-2g_1(z_0)g_3(z_0) > -kg_1(z_0)g_3(z_0) \geq -\left[g_1^2(z_0) + g_3^2(z_0)\right],$$

$$2 < k \le \frac{g_1(z_0)}{g_3(z_0)} + \frac{g_3(z_0)}{g_1(z_0)}.$$

При $A = -kg_1(z_0)g_3(z_0)$ і з урахуванням рівності (30) тотожність (33) можна записати таким чином:

$$\pm(z - z_0) = \int\limits_{g_1(z_0)}^{g_1(z)} \frac{ds}{\sqrt{\left[s^2 - \frac{k - \sqrt{k^2-4}}{2} g_1(z_0)g_3(z_0)\right]\left[s^2 - \frac{k + \sqrt{k^2-4}}{2} g_1(z_0)g_3(z_0)\right]}}. \quad (35)$$

Для початку припустимо, що $0 < g_1(z_0) < \sqrt{\frac{k - \sqrt{k^2-4}}{2} g_1(z_0)g_3(z_0)}$, і запишемо останній інтеграл у вигляді різниці інтегралів

$$\pm(z - z_0) = \int\limits_{g_1(z_0)}^{\sqrt{a_1}} \frac{ds}{\sqrt{[a_1 - s^2][a_2 - s^2]}} - \int\limits_{g_1(z)}^{\sqrt{a_1}} \frac{ds}{\sqrt{[a_1 - s^2][a_2 - s^2]}},$$

де $a_1 = \frac{k - \sqrt{k^2-4}}{2} g_1(z_0)g_3(z_0)$, $a_2 = \frac{k + \sqrt{k^2-4}}{2} g_1(z_0)g_3(z_0)$. Застосовуючи [14], а також інтегральні формули для функцій, обернених до еліптичних функцій Якобі (DLMF), із останньої рівності знаходимо

$$g_1(z) = \sqrt{a_1}\,\mathrm{cd}\left(\mp\sqrt{a_2}(z - z_0) + \mathrm{arccd}\left(\frac{g_1(z_0)}{\sqrt{a_1}}, \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}\right), \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}\right).$$

У разі $g_1(z_0) > \sqrt{\frac{k + \sqrt{k^2-4}}{2} g_1(z_0)g_3(z_0)}$ рівність (35) можна записати у вигляді

$$\pm(z - z_0) = \int\limits_{\sqrt{\alpha_1}}^{g_1(z)} \frac{ds}{\sqrt{[s^2 - \alpha_1][s^2 - \alpha_2]}} - \int\limits_{\sqrt{\alpha_1}}^{g_1(z_0)} \frac{ds}{\sqrt{[s^2 - \alpha_1][s^2 - \alpha_2]}},$$

де $\alpha_1 = \frac{k + \sqrt{k^2-4}}{2} g_1(z_0)g_3(z_0)$, $\alpha_2 = \frac{k - \sqrt{k^2-4}}{2} g_1(z_0)g_3(z_0)$. Знову застосовуючи [14], а також інтегральні формули для функцій, обернених до еліптичних функцій Якобі (DLMF), із останньої тотожності знаходимо

$$g_1(z) = \sqrt{\alpha_1}\,\mathrm{dc}\left(\pm\sqrt{\alpha_1}(z - z_0) + \mathrm{arcdc}\left(\frac{g_1(z_0)}{\sqrt{\alpha_1}}, \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\right), \sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}\right).$$

Тепер припустимо, що $g_3(z_0) > 0$; тоді з (32) випливає, що параметр A за допомогою величини $g_2(z_0)$ може приймати значення $kg_1(z_0)g_3(z_0)$, де коефіцієнт $k > 2$. При $A = kg_1(z_0)g_3(z_0)$ і з урахуванням рівності (30) тотожність (33) можна подати таким чином:

$$\pm(z - z_0) = \int\limits_{g_1(z_0)}^{g_1(z)} \frac{ds}{\sqrt{\left[s^2 + \frac{k - \sqrt{k^2-4}}{2} g_1(z_0)g_3(z_0)\right]\left[s^2 + \frac{k + \sqrt{k^2-4}}{2} g_1(z_0)g_3(z_0)\right]}}.$$

Запишемо останній інтеграл у вигляді різниці інтегралів

$$\pm(z-z_0)=\int\limits_0^{g_1(z)}\frac{ds}{\sqrt{[s^2+a_1][s^2+a_2]}}-\int\limits_0^{g_1(z_0)}\frac{ds}{\sqrt{[s^2+a_1][s^2+a_2]}},$$

де $a_1=\dfrac{k-\sqrt{k^2-4}}{2}g_1(z_0)g_3(z_0),\ a_2=\dfrac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}g_1(z_0)g_3(z_0)$. Застосовуючи [14], а також інтегральні формули для функцій, обернених до еліптичних функцій Якобі (DLMF), із останньої рівності знаходимо

$$g_1(z)=\sqrt{a_1}\,\mathrm{sc}\left(\pm\sqrt{a_2}(z-z_0)+\mathrm{arcsc}\left(\frac{g_1(z_0)}{\sqrt{a_1}},\sqrt{1-\frac{a_1}{a_2}}\right),\sqrt{1-\frac{a_1}{a_2}}\right).$$

Замість функції sc можна використати функцію cs [14].

Разом із (26) система (25) має ще два прості перші інтеграли

$$g_1g_3=B_{13},\qquad g_2g_4=B_{24},\tag{36}$$

де $B_{13},\ B_{24}$ — деякі сталі. З (26) і другої тотожності у (36) отримуємо

$$g_2=\frac{1}{2}\left[-(g_1+g_3+2C)\mp\sqrt{(g_1+g_3+2C)^2-4B_{24}}\right],$$
$$g_4=\frac{1}{2}\left[-(g_1+g_3+2C)\pm\sqrt{(g_1+g_3+2C)^2-4B_{24}}\right].$$

Тоді з першого рівняння системи (25) і першої рівності у (36) знаходимо

$$g_1'=\mp g_1\sqrt{\left(g_1+\frac{B_{13}}{g_1}+2C\right)^2-4B_{24}}.$$

Це рівняння аналогічне до рівнянь, розглянутих у попередніх прикладах. Зокрема, при $C=0$ останнє рівняння збігається з рівнянням (33).

Система (7) як частина більш загальної задачі досліджувалася в [16].

5. Висновок. У цій статті досліджено зв'язок між перетвореннями Беклунда та Дарбу для факторизаційних ланцюжків. Також вивчено деякі періодичні випадки ланцюжка Вольтерра (різницевого рівняння КдФ, ленгмюрівського ланцюжка).

Автор висловлює подяку рецензенту за цінні зауваження та рекомендації щодо покращення цієї роботи.

Автор заявляє про відсутність конфлікту інтересів. Усі необхідні дані містяться в статті. Дослідження автора підтримано грантом Simons Foundation (1290607, D. B.).

Література

1. V. E. Adler, *On the rational solutions of the Shabat equations*, Nonlinear Physics: Theory and Experiment (Lecce, 1995), World Sci. Publ., River Edge, NJ, 3 – 10 (1996).
2. L. Infeld, *On a new treatment of some eigenvalue problems*, Phys. Rev. (2), **59**, 737–747 (1941).
3. S. Skorik, V. Spiridonov, *Self-similar potentials and the q-oscillator algebra at roots of unity*, Lett. Math. Phys., **28**, 59 – 74 (1993).

4. A. P. Veselov, A. B. Shabat, *Dressing chains and the spectral theory of the Schrцdinger operator*, Funct. Anal. Appl., **27**, 81 – 96 (1993).
5. V. P. Spiridonov, *Self-similar potentials in quantum mechanics and coherent states*, Phys. Particles Nuclei, **52**, 274 – 289 (2021).
6. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов: метод обратной задачи*, Наука, Москва (1980).
7. М. Абловиц, Х. Сигур, *Солитоны и метод обратной задачи*, Мир, Москва (1987).
8. В. Э. Адлер, *Перекройка многоугольников*, Функцион. анализ и его прил., **27**, вып. 2, 79 – 82 (1993).
9. Д. В. Бельський, *Про деякі часткові розв'язки факторизуючих ланцюжків*, Нелін. коливання, **26**, № 3, 311 – 321 (2023).
10. M. Abramowitz, I. A. Stegun (eds.), *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables*, Dover Publications, Inc., New York (1966).
11. С. В. Манаков, *Полная интегрируемость и стохастизация дискретных динамических систем*, Журн. эксперим. теорет. физики, **67**, № 2, 543 – 555 (1974); ***English translation:*** J. Exp. Theor. Phys. (JETP), **40**, № 2, 269–274 (1975).
12. Г. П. Пелюх, Д. В. Бельський, *Про деякі нелінійні диференціально-функціональні рівняння нейтрального типу з лінійним відхиленням аргументу*, Нелін. коливання, **25**, № 4, 370 – 376 (2022); ***English translation:*** J. Math. Sci. (N.Y.), **277**, 291 – 297 (2023).
13. J. Weiss, *Periodic fixed points of Bдcklund transformations and the Korteweg – de Vries equation*, J. Math. Phys., **27**, 2647 – 2656 (1986).
14. B. C. Carlson, *Jacobian elliptic functions as inverses of an integral*, J. Comput. Appl. Math., **174**, 355 – 359 (2005).
15. Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, Наука, Москва (1969).
16. Б. А. Дубровин, В. Б. Матвеев, С. П. Новиков, *Нелинейные уравнения типа Кортевега – де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия*, Успехи мат. наук, **31**, вып. 1, 55 – 136 (1976).

Одержано 09.03.24,
після доопрацювання — 20.05.24