

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ З ОБМЕЖЕННЯМИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Олена Поліщук

*Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”
Берестейський просп., 37, Київ, 03056, Україна
e-mail: polya417@gmail.com*

We consider the problem with constraints for a singular integral equation with a Hilbert kernel and a small nonlinearity. We develop and substantiate the use of the projection-iterative method for construction of approximate solutions of the problem under consideration.

Розглянуто задачу з обмеженнями для сингулярного інтегрального рівняння з ядром Гільберта та малою нелінійністю. Розроблено й обґрунтовано застосування проєкційно-ітеративного методу побудови наближених розв'язків розглядуваної задачі.

Процес взаємного збагачення і розвитку теорії сингулярних інтегральних рівнянь, методів їх розв'язання та чисельного розв'язку нових прикладних задач із різних галузей природознавства і техніки безперервно продовжується. Значна роль, яку відіграють у сучасній науці задачі з імпульсним впливом або з параметрами та задачі, на розв'язок яких накладено певні обмеження, загальновідома, тому неодмінно постає питання розробки ефективних методів наближеного розв'язку таких задач. Методам розв'язання диференціальних та інтегральних рівнянь із додатковими умовами та сингулярних інтегральних рівнянь із параметрами присвячено багато робіт, зокрема [1–5]. У цій статті досліджуємо умови застосування наближених методів до розв'язання задачі з обмеженнями для сингулярних інтегральних рівнянь.

Постановка задачі. У дійсному просторі 2π -періодичних функцій при розв'язанні сингулярних інтегральних рівнянь із обмеженнями розглянемо задачу знаходження функції $x(t)$, що задовольняє рівняння

$$(Ax)(t) = f(t) + \mu(Fx)(t), \quad (1)$$

і додаткові умови

$$\Phi(x) = \alpha, \quad \alpha \in R^l, \quad (2)$$

де

$$(Ax)(t) = a(t)x(t) + \frac{b(t)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t)ctg \frac{\tau - t}{2} dt + \int_{-\pi}^{\pi} k(t, \tau)x(\tau)d\tau,$$

$$(Fx)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} H(t, \tau) F(\tau, x(\tau)) d\tau,$$

$\Phi(x) = (\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_l(x))$, $\Phi_s(x)$ — лінійно обмежені функціонали на класі функцій $L_2[-\pi, \pi]$, зокрема,

$$\Phi_s(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \eta_s(t) x(t) dt, \quad s = \overline{1, l},$$

$\{\eta_s(t)\}_{s=1}^l$ — задана система лінійно незалежних функцій у $L_2[-\pi, \pi]$.

Будемо вважати, що:

1) 2π -періодичні функції $a(t)$ і $b(t)$ задовольняють умову Гельдера і

$$a^2(t) + b^2(t) = 1 \quad \forall t \in [-\pi, \pi];$$

$$2) \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |k(t, \tau)|^2 dt d\tau < \infty, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(t, \tau)|^2 dt d\tau < \infty;$$

3) $F(t, u)$ — неперервна функція своїх аргументів, 2π -періодична по t і задовольняє умову

$$|F(t, u) - F(t, v)| \leq c|u - v| \quad \forall u, v \in R;$$

4) $f \in L_2[-\pi, \pi]$, $F(\cdot, 0) \in L_2[-\pi, \pi]$, μ — малий додатний параметр.

Нескладно помітити, що ми маємо перевизначену задачу. Задача (1), (2) є сумісною тільки в тому випадку, коли шукана функція задовольняє рівняння (1) і додаткові умови (2). Якщо рівняння (1) не має розв'язку чи існує розв'язок, але він не задовольняє умови (2), то задача (1), (2) несумісна. Зауважимо, що умови сумісності задачі (1), (2) встановлено в [6].

Для задачі (1), (2) розроблено й обґрунтовано застосування методів наближеного обчислення.

Ітераційний метод. Застосуємо до задачі (1), (2) ітераційний метод, згідно з яким наближені розв'язки знаходимо на основі формул

$$x_k(t) + z_k(t) = u_k(t), \quad \Phi(x_k) = \alpha_s, \quad s = \overline{1, l}, \quad (3)$$

$$z_k(t) = \sum_{j=1}^l \lambda_j^k (R\xi_j)(t), \quad j = \overline{1, l}, \quad (4)$$

$$u_k(t) = x_{k-1}(t) + R[f - Ax_{k-1} + \mu(Fx_{k-1})](t), \quad (5)$$

де $\{\xi_j(t)\}_{j=1}^l$ — задана система лінійно незалежних функцій у $L_2[-\pi, \pi]$, а R — еквівалентний регуляризатор оператора A вигляду

$$(Ry)(t) = a(t)y(t) - \frac{bt}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(\tau) ctg \frac{\tau - t}{2} d\tau. \quad (6)$$

Початкове наближення $x_0(t)$ визначаємо із задачі (3), (4) за умови, що $k = 0$, а u_0 задаємо довільним чином.

У [5] доведено, що ітераційний процес (3)–(5) можна звести до методу послідовних наближень розв'язання інтегрального рівняння, рівносильного розглядуваній задачі, і встановлено достатні умови збіжності, оцінки похибки й побудовано обчислювальну схему для чисельної реалізації методу.

Слід зазначити, що ітераційні методи мають показникову швидкість збіжності, прості обчислювальні схеми, але обмежену область застосування. Саме тоді проєкційні методи, маючи широку область застосування, характеризовано степеневую швидкістю збіжності, іноді досить повільною, та обчислювальною нестійкістю. На основі комбінування ідей прямих та ітераційних методів виник ефективний метод осереднення функціональних поправок Ю. Д. Соколова. Подальший розвиток і удосконалення методу осереднення функціональних поправок привели до створення проєкційно-ітеративного методу.

Проекційно-ітеративний метод. Згідно з проєкційно-ітеративним методом наближені розв'язки задачі (1), (2) будують на основі формул

$$x_k(t) + z_k(t) = u_k(t), \quad \Phi(x_k) = \alpha_s, \quad s = \overline{1, l}, \quad (7)$$

$$z_k(t) = \sum_{j=1}^l \lambda_j^k (R\xi_j)(t), \quad j = \overline{1, l}, \quad (8)$$

$$u_k(t) = y_k(t) + R[f - Ay_k + \mu(Fx_{k-1})](t), \quad (9)$$

$$y_k(t) = x_{k-1}(t) + \omega_k(t). \quad (10)$$

Поправку $\omega_k(t)$ будемо шукати у вигляді

$$\omega_k(t) = \sum_{i=1}^n a_i^k \zeta_i(t), \quad (11)$$

де невідомі коефіцієнти a_i^k , $i = \overline{1, n}$, визначаємо з умови

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(u_k - u_{k-1} - \sum_{i=1}^n a_i^k \varphi_i \right) (t) \psi_i(t) dt = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (12)$$

де $\{\xi_j(t)\}_{j=1}^l$, $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^n$, $\{\psi_i(t)\}_{i=1}^n$ — задані системи лінійно незалежних функцій у $L_2[-\pi, \pi]$, а R — еквівалентний регуляризатор оператора A вигляду (6).

Початкове наближення $x_0(t)$ визначаємо із задачі (7), (8) за умови, що $k = 0$, а u_0 задаємо довільним чином.

Зауважимо, що алгоритм (7)–(12) використано для побудови наближених розв'язків задачі з параметрами для сингулярних інтегральних рівнянь із малою нелінійністю. Доведено, що метод (7)–(12) можна звести до модифікованого варіанту проєкційно-ітеративного методу розв'язання інтегрального рівняння, рівносильного розглядуваній задачі (1), (2), за умови, що системи функцій $\{\varphi_i(t)\}$, $\{\psi_i(t)\}$, $\{\zeta_i(t)\}$, $\{(R\xi)_i(t)\}$ і векторів $\{\mu_i\}$ задовольняють співвідношення

$$\varphi_i(t) = \zeta_i(t) + \sum_{j=1}^l \mu_j^i (R\xi_j)(t), \quad \int_{-\pi}^{\pi} \eta_s(t) \zeta_i(t) dt = 0, \quad s = \overline{1, l}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (13)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (R\xi_s)(t)\psi_i(t)dt = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad s = \overline{1, l}. \quad (14)$$

Для цього методу встановлено достатні умови збіжності та оцінки похибки [3].

Достатні умови збіжності. Сформулюємо достатні умови збіжності проєкційно-ітеративного методу (7)–(12) у випадку, коли він використовується для побудови наближених розв’язків перевизначеної задачі (1), (2).

Теорема 1. Якщо спектральний радіус $\rho(\tilde{A}) < 1$, виконуються умови 1)–4), співвідношення (13), (14) і задача (1), (2) сумісна, то існує єдиний розв’язок $x^*(t)$ задачі (1), (2) і послідовність $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$, побудована згідно з проєкційно-ітеративним методом (7)–(12), збігається за нормою до цього розв’язку, причому

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_j^k = 0, \quad j = \overline{1, l}.$$

Тут $\tilde{A}$ — матриця, схема побудови якої відома [7].

Зауваження. Якщо задача (1), (2) несумісна, але всі інші умови теореми 1 виконано, то метод (7)–(12) збіжний і мають місце співвідношення

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t) = x^*(t), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_j^k = \lambda_j^* \neq 0, \quad j = \overline{1, l}.$$

Проте, якщо до лівої частини (1) додати елемент $\sum_{j=1}^l \lambda_j^* \xi_j(t)$, то задача (1), (2) стане сумісною.

Справедлива обернена теорема, яка має важливе практичне значення.

Теорема 2. Якщо спектральний радіус $\rho(\tilde{A}) < 1$, виконуються умови 1)–4), співвідношення (13), (14) і

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_j^k = 0, \quad j = \overline{1, l},$$

то задача (1), (2) буде сумісною, причому її розв’язок має вигляд

$$x^*(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t),$$

$\{\lambda_k\}_{k=0}^{\infty}$, $\{x_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ — послідовності, побудовані згідно з проєкційно-ітеративним методом (7)–(12).

Зауваження 1. При $\mu = 0$ алгоритм (7)–(12) вироджується у проєкційно-ітеративний метод розв’язання лінійної перевизначеної задачі

$$(Ax)(t) = f(t), \quad \Phi(x) = \alpha, \quad \alpha \in R^l,$$

а на основі теореми 1 можна встановити достатні умови збіжності методу.

Автор заявляє про відсутність конфлікту інтересів і спеціального фінансування цієї роботи. Усі необхідні дані містяться в статті.

Література

1. А. Ю. Лучка, *Методи дослідження систем диференціальних рівнянь з імпульсним впливом*, Укр. мат. журн., **50**, № 2, 189–194 (1998).
2. О. Б. Поліщук, *Методи розв'язання лінійних сингулярних інтегральних рівнянь з параметрами*, Доп. НАН України, № 1, 48–52 (1998).
3. О. Б. Поліщук, *Модифікований проєкційно-ітеративний метод розв'язання сингулярного інтегрального рівняння з параметрами та з малою нелінійністю*, Укр. мат. журн., **51**, № 3, 418–422 (1999).
4. А. Ю. Лучка, В. А. Ферук, *Модифікований проєкційно-ітеративний метод для систем квазілінійних диференціальних рівнянь із запізненням та обмеженням*, Нелін. коливання, **7**, № 2, 188–207 (2004).
5. О. Б. Поліщук, *Ітераційний метод розв'язання задачі з обмеженнями для сингулярних інтегральних рівнянь*, Проблеми динаміки та стійкості багатовимірних систем, Зб. праць Інституту математики НАН України, **10**, № 3, 171–177 (2013).
6. О. Б. Поліщук, *Умови сумісності задачі з обмеженнями для сингулярних інтегральних рівнянь*, Нелін. коливання, **3**, № 4, 511–514 (2000).
7. А. Ю. Лучка, *Методи розв'язання рівнянь з обмеженнями і проєкційно-ітеративний метод Ю. Д. Соколова*, Укр. мат. журн., **48**, № 11, 1501–1509 (1996).

Одержано 14.07.23,
після доопрацювання — 20.11.23