

**АСИМПТОТИКА РОЗВ'ЯЗКУ ДВОТОЧКОВОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ
ДЛЯ ЛІНІЙНОЇ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ СИСТЕМИ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ВИПАДКУ
СИНГУЛЯРНОЇ ГРАНИЧНОЇ В'ЯЗКИ МАТРИЦЬ
(ОДНОВИМІРНИЙ ВИПАДОК). ЧАСТИНА 1**

Ольга Пафик

*Український державний університет імені Михайла Драгоманова
вул. Пирогова, 9, Київ, 01601, Україна
e-mail: o.v.pafyk@npu.edu.ua*

Сергій Пафик

*Український державний університет імені Михайла Драгоманова
вул. Пирогова, 9, Київ, 01601, Україна
Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”
просп. Перемоги, 37, Київ, 03056, Україна
e-mail: s.p.pafyk@npu.edu.ua, відповідальний за листування*

By using asymptotic methods of the theory of differential equations and the method of Newton's diagrams, we investigate the problem of construction of an asymptotic solution of the two-point boundary-value problem for a linear singularly perturbed system of differential equations in the case of a singular boundary bundle of matrices that does not contain a regular kernel.

З використанням асимптотичних методів у теорії диференціальних рівнянь і методу діаграм Ньютона досліджено питання побудови асимптотичного розв'язку двоточкової крайової задачі для лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь у випадку сингулярної граничної в'язки матриць, яка не містить регулярного ядра.

1. Постановка задачі. Розглянемо двоточкову крайову задачу

$$\varepsilon^h B(t; \varepsilon) \frac{dx}{dt} = A(t; \varepsilon)x + f(t; \varepsilon) \exp \left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \alpha(\tau) d\tau \right), \quad (1)$$

$$Mx(0; \varepsilon) + Nx(T; \varepsilon) = p(\varepsilon), \quad (2)$$

у якій $x(t; \varepsilon)$ — шуканий n -вимірний вектор, $A(t; \varepsilon)$, $B(t; \varepsilon)$ — квадратні матриці n -го порядку, елементи яких є дійсними або комплекснозначними функціями, M , N — квадратні матриці n -го порядку зі сталими елементами, $f(t; \varepsilon)$ — задана n -вимірна вектор-функція, компонентами якої є дійсні або комплекснозначні функції, $\alpha(t)$ — скалярна функція, $p(\varepsilon)$ — заданий n -вимірний вектор, $t \in [0; T]$, $h \in N$, $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \ll 1$.

Задачу (1), (2) досліджуватимемо за виконання таких умов:

1°. Матриці $A(t; \varepsilon)$, $B(t; \varepsilon)$ і вектор $f(t; \varepsilon)$ допускають на відрізьку $[0; T]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями малого параметра ε :

$$A(t; \varepsilon) \sim \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k A_k(t), B(t; \varepsilon) \sim \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k B_k(t), f(t; \varepsilon) \sim \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k f_k(t).$$

2°. Елементи матриць $A_k(t) = \|a_{ij}^{(k)}(t)\|_1^n$, $B_k(t) = \|b_{ij}^{(k)}(t)\|_1^n$, $k = 0, 1, \dots$, і компоненти векторів $f_k(t) = (f_1^{(k)}(t); f_2^{(k)}(t); \dots; f_n^{(k)}(t))^T$, $k = 0, 1, \dots$, нескінченно диференційовні на відрізьку $[0; T]$:

$$a_{ij}^{(k)}(t) \in C^\infty[0; T]; \quad b_{ij}^{(k)}(t) \in C^\infty[0; T], \quad f_i^{(k)}(t) \in C^\infty[0; T], \quad i, j = \overline{1, n}, \quad k = 0, 1, \dots$$

3°. Гранична в'язка матриць

$$L(t; \lambda) = A_0(t) - \lambda B_0(t) \quad (3)$$

системи (1) є сингулярною для всіх $t \in [0; T]$ і зберігає сталу кронекерову структуру на відрізьку $[0; T]$, причому в'язка матриць (3) має по одному мінімальному індексу для стовпців і рядків: $p \geq 0$ для стовпців і $q = n - p - 1$ для рядків.

4°. Вектор $p(\varepsilon)$ можна зобразити у вигляді асимптотичного ряду $p(\varepsilon) \sim \sum_{k \geq 0} \varepsilon^k p_k$.

5°. $(B_1(t)\tilde{\varphi}(t); \tilde{\psi}(t)) \neq 0 \quad \forall t \in [0; T]$, де $\tilde{\varphi}(t)$, $\tilde{\psi}(t)$ — елементи нуль-простору матриць $B_0(t)$ і $B_0^*(t)$ відповідно.

На сьогодні досить добре розвинута теорія побудови асимптотики загального розв'язку системи (1). Як відомо, перший результат отримав у 1908 р. Birkhoff [1], увівши асимптотичні формули, які зображають лінійно незалежні розв'язки скалярного диференціального рівняння n -го порядку у випадку простих коренів відповідного характеристичного рівняння. У 1917 р. Тамаркін [2] узагальнив цей результат на систему вигляду (1), у якій при похідній знаходиться одинична матриця, тобто $B(t; \varepsilon) = E$.

Асимптотичні формули, отримані цими вченими, виявилися настільки ефективними, що з'явився інтерес щодо їхнього узагальнення й для випадку кратного спектра головної матриці $A_0(t)$. Однак ця задача виявилася дуже складною і довгий час залишалася не розв'язаною.

У 1936 р. Nukuhara [3], а пізніше, незалежно від нього, Фещенко [4, 5] довели теореми про асимптотичне розщеплення системи вигляду (1) при $B(t; \varepsilon) = E$ і $h = 1$, головна матриця якої має на заданому відрізьку кілька ізольованих одна від одної груп власних значень, на відповідну кількість підсистем меншої розмірності, головні матриці яких мають лише власні значення цих груп. Ці теореми дозволяють звести задачу побудови асимптотичних розв'язків системи (1) за наявності у матриці A_0 кількох ізольованих власних значень до системи з одним власним значенням головного оператора. Проте проблема побудови асимптотики загального розв'язку цих систем у випадку, коли головна матриця має кратне власне значення, залишалася не розв'язаною.

У 1956 р. Turritin [6] для розв'язання проблеми кратного спектра головного оператора запропонував застосовувати так зване зрізаюче перетворення, за допомогою якого при певних умовах систему з кратним спектром головного оператора можна звести до системи, головна матриця якої має простий спектр. Такий самий метод пропонує і Wasow у [7].

І лише в 1960-х рр. Шкіль розробив метод побудови асимптотичних розв'язків лінійно незалежних розв'язків однорідної системи вигляду

$$\varepsilon^h \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x$$

у випадку, коли головна матриця $A_0(t)$ має кратне власне значення, якому відповідають кратні елементарні дільники [8–10]. Виявилося, що, на відміну від випадку простого спектра головного оператора, у випадку кратного спектра відповідні розв'инення необхідно будувати за дробовими степенями малого параметра. Зокрема, за певних обмежень на збурювальну матрицю $A_1(t)$ всі n шуканих розв'язків можна побудувати у вигляді розв'инень за степенями $\varepsilon^{\frac{1}{p}}$, де p — кратність власного значення матриці $A_0(t)$.

У зв'язку з цим виникла проблема визначення дробових показників степенів малого параметра, за якими потрібно будувати відповідні розв'инення, залежно від структури збурювальних матриць $A_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$. Цю проблему в 1980-х рр. розв'язала Жукова [11], розглянувши її у найбільш загальній постановці і використовуючи операторні методи, вивела відповідне рівняння розгалуження і застосувала до нього метод діаграм Ньютона.

У 1990-х рр. результати, отримані в працях Шкіля і Жукової, узагальнив Яковець на лінійну сингулярно збурену систему (1). Ці результати опубліковано у 2000 р. у спільній монографії Самойленка, Шкіля та Яковця [12]. У ній виведено більш компактні та зручні для практичного використання формули, які виражають коефіцієнти рівняння розгалуження, а також досліджено систему (1) у випадках, коли матриця $B(t; \varepsilon)$ тотожно вироджується або вироджується при $\varepsilon \rightarrow 0$. Важливе значення цієї монографії полягає також у тому, що в ній систему (1) досліджено не лише у випадку, коли гранична в'язка матриць (3) системи (1) є регулярною, але й коли відповідна в'язка матриць (3) є сингулярною.

Результати, отримані в [12], мають вагоме значення для дослідження диференціально-алгебраїчних систем рівнянь, оскільки такі системи можуть бути зведені до системи вигляду (1) з тотожно виродженою матрицею при старшій похідній. Значні результати при дослідженні диференціально-алгебраїчних систем одержано в роботах [13–18].

Результати, здобуті в [12], дали можливість для систем вигляду (1) розглядати початкову та крайову задачі. Крайову задачу вигляду (1), (2) досліджено в [19–21] у випадку, коли в'язка матриць (3) є регулярною. У [19] розглянуто випадок, коли відповідна гранична в'язка матриць (3) має лише прості скінченні та нескінченні елементарні дільники, а в [20, 21] — коли гранична в'язка матриць має кратні елементарні дільники. Зокрема, в [20] розглянуто випадок, коли гранична в'язка матриць має один скінченний елементарний дільник кратності $n - 1$ і один простий нескінченний елементарний дільник, а в [21] — коли гранична в'язка матриць має по одному кратному скінченному та нескінченному елементарному дільнику кратності p і $q = n - p$ відповідно. Також у [22] розглянуто крайову задачу для системи другого порядку.

У цій статті крайову задачу (1), (2) розглядаємо у випадку, коли гранична в'язка матриць (3) є сингулярною і не містить регулярного “ядра”, при цьому має по одному мінімальному індексу для стовпців і рядків. Крайову задачу у сингулярному випадку розглянуто вперше.

2. Побудова формального розв'язку лінійної однорідної системи. Використовуючи результати з [12], запишемо формальний розв'язок системи (1). Для цього спочатку знайдемо формальний розв'язок однорідної системи

$$\varepsilon^h B(t; \varepsilon) \frac{dx}{dt} = A(t; \varepsilon)x, \quad (4)$$

яка відповідає системі (1).

Згідно з [12, с. 212] умова 5° забезпечує те, що при досить малих значеннях параметра $\varepsilon > 0$ матриця $B(t; \varepsilon)$ є неособливою, а тому фундаментальна система розв'язків системи (4) складається з n лінійно незалежних частинних розв'язків.

Також при виконанні умови 5° згідно з [12] многочлен

$$L_{01}(\lambda_0(t)) = - \sum_{k=0}^n \lambda_0^{n-k} \widehat{M}_{k,1},$$

де

$$\widehat{M}_{k,1} = \left(P_{k,0}^1(GK; G\tilde{B})\tilde{\varphi}(t); \tilde{\psi}(t) \right) - \left(P_{k,1}^1(GK; G\tilde{B})\tilde{\varphi}(t); \tilde{\psi}(t) \right), \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (5)$$

є многочленом n -го степеня. Отже, з рівняння

$$L_{01}(\lambda_0(t)) = 0 \quad (6)$$

можна знайти n значень функції $\lambda_0(t)$, враховуючи їхню кратність. Тому припустимо, що крім умов 1° – 5° виконується умова

6°. Рівняння (6) має один корінь $\lambda_0(t)$ кратності n , який задовольняє умову

$$\left(\left(\Gamma_1(t; \lambda_0(t))H(\lambda_0(t))\Gamma_1(t; \lambda_0(t)) - \Gamma_2(t; \lambda_0(t)) \right) \varphi(t; \lambda_0(t)); \psi(t; \lambda_0(t)) \right) \neq 0 \quad \forall t \in [0; T],$$

де $\varphi(t; \lambda_0(t))$, $\psi(t; \lambda_0(t))$ — елементи нуль-простору матриць $L(t; \lambda_0(t)) = A_0(t) - \lambda_0(t)B_0(t)$ і $L^*(t; \lambda_0(t)) = (A_0(t) - \lambda_0(t)B_0(t))^*$ відповідно, а $H(\lambda_0(t))$ — матриця, напівообернена до матриці $L(t; \lambda_0(t))$.

У рівності (5) $P_{ij}^k(GK; G\tilde{B})$ — вираз, який відрізняється від виразу $\tilde{P}_{ij}^k(GK; G\tilde{B})$ лише відсутністю у всіх його доданках першого множника $G(t)$, де $G(t)$ — матриця, напівообернена до матриці $B_0(t)$. Водночас $\tilde{P}_{ij}^k(GK; G\tilde{B})$ — сума всіх можливих добутків i множників вигляду $GK_{r_i}, GK_{r_2}, \dots, GK_{r_i}$ та j множників вигляду $G\tilde{B}_{s_1}, G\tilde{B}_{s_2}, \dots, G\tilde{B}_{s_j}$, сума індексів яких $r_1 + r_2 + \dots + r_i + s_1 + s_2 + \dots + s_j = k$, $r_l \in N \setminus \{0\}$, $l = \overline{1, i}$, $s_l \in N$, $l = \overline{1, j}$.

В умові 6° і формулі (5) $\Gamma_k(t; \lambda_0(t))$, $k_s(t)$, $\tilde{B}_s(t)$ — оператори, визначені за формулами

$$\Gamma_k(t; \lambda_0(t)) = A_k(t) - \lambda_0(t)B_k(t) - B_{k-h}(t)\frac{d}{dt}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

$$K_s(t) = A_s(t) - B_{s-h}(t)\frac{d}{dt}, \quad s = 0, 1, \dots, 11, \quad (8)$$

$$\tilde{B}_s(t) = B_s(t), \quad s = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Вважатимемо також, що в'язка матриць $L(t, \lambda_0(t))$ має канонічний вигляд

$$L(t; \lambda_0(t)) = \text{diag}\{L_1(t; \lambda_0(t)), L_2(t; \lambda_0(t))\},$$

де

$$L_1(t; \lambda_0(t)) = \begin{pmatrix} \lambda_0(t) & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0(t) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_0(t) & 1 \end{pmatrix},$$

$$L_2(t; \lambda_0(t)) = \begin{pmatrix} -\lambda_0(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -\lambda_0(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda_0(t) \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Зауваження 1. Якщо в'язка матриць $L(t; \lambda_0(t))$ не має структурного представлення (10), то тоді згідно з [12] систему (1) можна звести до системи, гранична в'язка якої має таке представлення. Для цього потрібно систему (1) помножити зліва на матрицю $P(t)$ і в отриманій системі зробити заміну $x = Q(t)y$, де $P(t)$ і $Q(t)$ — перетворювальні матриці, які зводять в'язку матриць (3) до найпростішого вигляду (10).

Якщо в'язка матриць (3) має канонічний вигляд (10), то тоді матриця $H(\lambda_0(t))$ має структуру

$$H(\lambda_0(t)) = \text{diag}\{L_1^+(t; \lambda_0(t)); L_2^+(t; \lambda_0(t))\},$$

де

$$L_1^+(t; \lambda_0(t)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \lambda_0(t) & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_0^{p-1}(t) & \lambda_0^{p-2}(t) & \cdots & \lambda_0(t) & 1 \end{pmatrix},$$

$$L_2^+(t; \lambda_0(t)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \lambda_0(t) & \cdots & \lambda_0^{q-1}(t) \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \lambda_0^{q-2}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_0(t) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді згідно з [12], використовуючи метод діаграм Ньютона, при виконанні умов $1^\circ - 6^\circ$ можна побудувати n формальних розв'язків першої групи, які утворюють фундаментальну систему розв'язків системи (4), у вигляді

$$x^{(j)}(t; \varepsilon) = v^{(j)}(t; \varepsilon) \exp \left(\varepsilon^h \int_{t_0}^t (\lambda_0(\tau) + \lambda^{(j)}(\tau; \varepsilon)) d\tau \right), \quad j = \overline{1, n}, \quad (11)$$

де $v^{(j)}(t; \varepsilon)$, $j = \overline{1, n}$, — n -вимірні вектор-функції, а $\lambda^{(j)}(t; \varepsilon)$, $j = \overline{1, n}$, — скалярні функції, які зображаються у вигляді

$$v^{(j)}(t; \varepsilon) = \varphi(t; \lambda_0(t)) + \sum_{s=1}^{+\infty} \varepsilon_n^s v_s^{(j)}(t); \quad \lambda(t; \varepsilon) = \sum_{s=1}^{+\infty} \varepsilon_n^s \lambda_s^{(j)}(t). \quad (12)$$

Коефіцієнти розвинень (12) згідно з [12, с. 211] визначаємо за формулами

$$\lambda_1^{(j)}(t) = \sqrt[n]{\left| \frac{L_{02}(\lambda_0(t))}{L_{n,1}(\lambda_0(t))} \right|} \exp\left(\frac{i}{n} \left(\arg\left(-\frac{L_{02}(\lambda_0(t))}{L_{n,1}(\lambda_0(t))}\right) \right) + 2\pi(j-1)\right), \quad j = \overline{1, n}, \quad (13)$$

$$\lambda_k^{(j)}(t) = -\frac{g_k^{(j)}(t)}{n \left[\lambda_1^{(j)}(t) \right]^{n-1} L_{n,1}(\lambda_0(t))}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (14)$$

де

$$g_k^{(j)} = \sum_{s=2}^{\left[\frac{2n+k-1}{n} \right]} \sum_{i=1}^{2n+k-1-ns} L_{i,s} \left[P_i^{2n+k-1-ns}(\lambda) \right] + \sum_{i=n+1}^{n+k-1} L_{i,1} \left[P_i^{n+k-1}(\lambda) \right] + L_{n,1} \left[\hat{P}_n^{n+k-i}(\lambda) \right] \quad (15)$$

— відомий вираз, в якому $\hat{P}_n^{n+k-i}(\lambda)$ — частина виразу $P_n^{n+k-1}(\lambda)$, яка не містить $\lambda_k^{(j)}(t)$, $j = \overline{1, n}$, $k = 1, 2, \dots$;

$$v_k^{(j)}(t) = \sum_{s=0}^{\left[\frac{k}{n} \right]} \sum_{i=0}^{k-ns} H(\lambda_0(t)) \tilde{L}_{i,s} \left[P_i^{k-ns}(\lambda) \right] \varphi(t; \lambda_0(t)), \quad j = \overline{1, n}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (16)$$

У формулах (13)–(16)

$$\begin{aligned} L_{0,s}(\lambda_0(t)) &= \sum_{j=1}^s (-1)^j \left(P_j^s(H\Gamma) \varphi(t; \lambda_0(t)); \psi(t; \lambda_0(t)) \right), \quad s = 1, 2, \dots, \\ L_{k,s}[\lambda^k] &= \sum_{i=0}^{\left[\frac{s}{h} \right]} \sum_{j=0}^{s-hi} (-1)^j D^i[\lambda^k] \left(P_{i+k,j}^{s-hi}(HB; H\Gamma) \varphi(t; \lambda_0(t)); \psi(t; \lambda_0(t)) \right), \quad k, s \geq 1, \\ \tilde{L}_{0s} &= \sum_{j=1}^s (-1)^j \tilde{P}_j^s(H\Gamma), \quad s \geq 1, \\ \tilde{L}_{ks}[\lambda^k] &= \sum_{i=0}^{\left[\frac{s}{h} \right]} \sum_{j=0}^{s-ih} (-1)^j D^i[\lambda^k] P_{i+k,j}^{s-ih}(HB; H\Gamma), \quad k \geq 1, \quad s \geq 0, \end{aligned}$$

де $\tilde{P}_j^s(H\Gamma)$ — сума всіх можливих добутоків j множників $H\Gamma_{s_1}, H\Gamma_{s_2}, \dots, H\Gamma_{s_j}$ таких, що $s_1 + s_2 + \dots + s_j = s$, $s_j \in N$, а вирази $P_j^s(H\Gamma)$ відрізняються від виразів $\tilde{P}_j^s(H\Gamma)$ лише відсутністю в усіх доданках першого множника $H(\lambda_0(t))$.

Зауваження 2. Зазначимо, що згідно з [12, с. 201] $L_{k,1}(\lambda_0(t)) = 0$, $k = \overline{1, n-1}$, $L_{n,1}(\lambda_0(t)) \neq 0$.

Перейдемо тепер до побудови частинного розв'язку неоднорідної системи (1).

3. Побудова частинного формального розв'язку неоднорідної системи. Частинний розв'язок системи (1) згідно з [12] шукатимемо у вигляді

$$\bar{x}(t; \varepsilon) = \varepsilon^{-m} w(t; \varepsilon), \quad (17)$$

де m — натуральне число, яке потрібно визначити, а $w(t; \varepsilon)$ — n -вимірний вектор-функція, яка зображається у вигляді формального ряду

$$w(t; \varepsilon) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k w_k(t) \exp \left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \alpha(\tau) d\tau \right). \quad (18)$$

Якщо виконуються умови

7°. $L_{0s}(\alpha(t)) \equiv 0$ при $s < m \leq h$; $L_{0m}(\alpha(t)) \neq 0 \quad \forall t \in [0; T]$,
то згідно з [12, с. 234–235] коефіцієнти $w_k(t)$, $k = 0, 1, \dots$, розвинень (18) визначаються за формулами

$$\begin{aligned} w_k(t) = & \sum_{s=0}^k \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k-s}{h} \rfloor} \sum_{j=0}^{k-s-hi} (-1)^j \frac{d^i C_s(t)}{dt^i} \tilde{P}_{i,j}^{k-s-hi}(HB; H\Gamma) \varphi(\alpha(t)) \\ & + \sum_{j=0}^{k-m-1} \sum_{i=1}^{k-m-j} (-1)^{i+1} H(\alpha(t)) P_i^{k-m-j}(H\Gamma) f_j(t) - H(\alpha(t)) f_{k-m}(t), \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} C_0(t) = & -\frac{(f_0(t); \psi(\alpha(t)))}{L_{0m}(\alpha(t))}, \\ C_k(t) = & -\frac{1}{L_{0m}(\alpha(t))} \left[\sum_{s=m+1}^{m+k} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{s}{h} \rfloor} \frac{d^i C_{m+k-s}(t)}{dt^i} \frac{\partial^i L_{0,s-hi}(\alpha(t))}{\partial \alpha^i} + d_k(t) \right], \quad k \geq 1, \\ d_k(t) = & \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=1}^{k-j} (-1)^{i+1} \left(P_i^{k-j}(\Gamma H) f_j(t); \psi(\alpha(t)) - (f_k(t); \psi(\alpha(t))) \right), \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (20)$$

де $\varphi(\alpha(t))$, $\psi(\alpha(t))$ — власні вектори в'язок матриць $L(t; \alpha(t))$ і $L^*(t; d(t))$ відповідно, $H(\alpha(t))$ — матриця, напівообернена до матриці $L(t; \alpha(t))$.

4. Побудова формального розв'язку крайової задачі. Перейдемо тепер до побудови формального розв'язку крайової задачі (1), (2).

При виконанні умов 1° – 7° формальний розв'язок неоднорідної системи (1) зобразимо у вигляді

$$\begin{aligned} x(t; \varepsilon) = & \varepsilon^{-m} \sum_{j=1}^n c_j(\varepsilon) v^{(j)}(t; \varepsilon) \exp \left(\varepsilon^{-h} \int_{t_0}^t (\lambda_0(\tau) + \lambda^{(j)}(\tau; \varepsilon)) d\tau \right) \\ & + \varepsilon^{-m} \omega(t; \varepsilon) \exp \left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \alpha(\tau) d\tau \right), \end{aligned} \quad (21)$$

де $c_j(\varepsilon)$ — вирази, які можна зобразити у вигляді формальних рядів

$$c_j(\varepsilon) = \sum_{s=0}^{+\infty} \varepsilon^{\frac{s}{n}} c_s^{(j)}, \quad (22)$$

де $c_s^{(j)}$ — невідомі сталі, які потрібно визначити.

Припустимо, що крім умов $1^\circ - 7^\circ$ виконується умова

$$8^\circ. \quad \operatorname{Re} \left(\lambda_0(t) + \sum_{k=1}^{nh-1} \varepsilon^{\frac{k}{n}} \lambda_k^{(j)}(t) \right) < 0, \quad j = \overline{1, l} \quad \forall t \in [0; T],$$

$$\operatorname{Re} \left(\lambda_0(t) + \sum_{k=1}^{nh-1} \varepsilon^{\frac{k}{n}} \lambda_k^{(j)}(t) \right) > 0, \quad j = \overline{l+1, n}, \quad \operatorname{Re}(\alpha(t)) < 0 \quad \forall t \in [0; T].$$

Тоді рівність (21) наведемо у вигляді

$$\begin{aligned} x(t; \varepsilon) = & \varepsilon^{-m} \sum_{j=1}^l c_j(\varepsilon) v^{(j)}(t; \varepsilon) \exp \left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \left(\lambda_0(\tau) + \lambda^{(j)}(\tau; \varepsilon) \right) d\tau \right) \\ & + \varepsilon^{-m} \sum_{j=l+1}^n c_j(\varepsilon) v^{(j)}(t; \varepsilon) \exp \left(\varepsilon^{-h} \int_T^t \left(\lambda_0(\tau) + \lambda^{(j)}(\tau; \varepsilon) \right) d\tau \right) \\ & + \varepsilon^{-m} \omega(t; \varepsilon) \exp \left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \alpha(\tau) d\tau \right). \end{aligned} \quad (23)$$

У формулі (22) коефіцієнти $c_k^{(j)}$, $j = \overline{1, n}$, $k = 0, 1, \dots$, визначатимемо таким чином, щоб вектор (23) задовольняв крайову умову (2). Для цього підставимо (23) у (2). У результаті отримаємо

$$\begin{aligned} & M \sum_{j=1}^l \varepsilon^{-m} c_j(\varepsilon) v^{(j)}(0; \varepsilon) \\ & + M \sum_{j=l+1}^n \varepsilon^{-m} c_j(\varepsilon) v^{(j)}(0; \varepsilon) \exp \left(\varepsilon^{-h} \int_T^0 \left(\lambda_0(\tau) + \lambda^{(j)}(\tau; \varepsilon) \right) d\tau \right) \\ & + N \sum_{j=l+1}^n \varepsilon^{-m} c_j(\varepsilon) v^{(j)}(T; \varepsilon) + \varepsilon^{-m} M \omega(0; \varepsilon) + \varepsilon^{-m} N \omega(T; \varepsilon) \exp \left(\varepsilon^{-h} \int_0^T \alpha(\tau) d\tau \right) \\ & + N \sum_{j=1}^l \varepsilon^{-m} c_j(\varepsilon) v^{(j)}(T; \varepsilon) \exp \left(\varepsilon^{-h} \int_0^T \left(\lambda_0(\tau) + \lambda^{(j)}(\tau; \varepsilon) \right) d\tau \right) = p(\varepsilon). \end{aligned} \quad (24)$$

Оскільки $\operatorname{Re} \left(\lambda_0(t) + \sum_{k=1}^{nh-1} \varepsilon^{\frac{k}{n}} \lambda_k^{(j)}(t) \right) < 0$, $j = \overline{1, l} \quad \forall t \in [0; T]$, то множники

$$\exp \left(\varepsilon^{-h} \int_0^T \left(\lambda_0(\tau) + \lambda^{(j)}(\tau; \varepsilon) \right) d\tau \right), \quad j = \overline{1, l},$$

будуть експоненціально малими згідно з [23], тому у формулі (24) ними можна знехтувати. Аналогічно, оскільки $\operatorname{Re}\left(\lambda_0(t) + \sum_{k=1}^{nh-1} \varepsilon^{\frac{k}{n}} \lambda_k^{(j)}(t)\right) > 0$, $j = \overline{l+1, n}$, $\operatorname{Re}(\alpha(t)) < 0 \quad \forall t \in [0; T]$, то тоді множники

$$\exp\left(-\varepsilon^{-h} \int_0^T (\lambda_0(\tau) + \lambda^{(j)}(\tau; \varepsilon) d\tau)\right), \quad j = \overline{l+1, n}, \quad \text{і} \quad \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^T \alpha(\tau) d\tau\right)$$

є експоненціально малими, тому в рівності (24) ними також можна знехтувати.

Отже, внаслідок отримуємо

$$M \sum_{j=1}^l \varepsilon^{-m} c_j(\varepsilon) v^{(j)}(0; \varepsilon) + \varepsilon^{-m} M w(0; \varepsilon) + N \sum_{j=l+1}^h \varepsilon^{-m} c_j(\varepsilon) v^{(j)}(T; \varepsilon) = p(\varepsilon)$$

або

$$\sum_{j=1}^l M c_j(\varepsilon) v^{(j)}(0; \varepsilon) + \sum_{j=l+1}^n N c_j(\varepsilon) v^{(j)}(T; \varepsilon) = \varepsilon^m p(\varepsilon) - M w(0; \varepsilon).$$

Перетворимо останню рівність:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^{\frac{k}{n}} \left(\sum_{j=1}^l \sum_{i=0}^k c_i^{(j)} M v_{k-i}^{(j)}(0) \right) + \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^{\frac{k}{n}} \left(\sum_{j=l+1}^n \sum_{i=0}^k c_i^{(j)} N v_{k-i}^{(j)}(T) \right) \\ = \sum_{k=m}^{+\infty} \varepsilon^{k-m} p_{k-m} - \sum_{k=0}^{+\infty} \varepsilon^k M w_k(0). \end{aligned}$$

Позначивши $\varepsilon^{\frac{1}{n}} = \mu$, одержимо

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} \mu^k \left(\sum_{j=1}^l \sum_{i=0}^k c_i^{(j)} M v_{k-i}^{(j)}(0) \right) + \sum_{k=0}^{+\infty} \mu^k \left(\sum_{j=l+1}^n \sum_{i=0}^k c_i^{(j)} N v_{k-i}^{(j)}(T) \right) \\ = \sum_{k=m}^{+\infty} \mu^{n(k-m)} p_{k-m} - \sum_{k=0}^{+\infty} \mu^{kn} M w_k(0). \end{aligned}$$

Прирівнюючи в останній рівності коефіцієнти при однакових степенях параметра μ , дістаємо

$$\sum_{j=1}^l c_0^{(j)} M v_0^{(j)}(0) + \sum_{j=l+1}^n c_0^{(j)} N v_0^{(j)}(T) = -M w_0(0); \quad (25)$$

$$\sum_{j=0}^k \sum_{j=1}^l c_i^{(j)} M v_{k-i}^{(j)}(0) + \sum_{i=0}^k \sum_{j=l+1}^n c_i^{(j)} N v_{k-i}^{(j)}(T) = p_{\frac{k-m}{n}} - M w_{\frac{k}{n}}(0), \quad k = 1, 2, \dots \quad (26)$$

Покажемо, що з систем (25), (26) рекурентним чином можна визначити коефіцієнти $c_k^{(j)}$, $k = 0, 1, \dots$, $j = \overline{1, n}$.

Представимо систему (25) у векторно-матричному вигляді

$$W_0 C_0 = -M \omega_0(0), \quad (27)$$

де $W_k = [Mv_k^{(1)}(0), \dots, Mv_k^{(l)}(0), Nv_k^{(l+1)}(T), \dots, Nv_k^{(k)}(T)]$ — квадратна матриця n -го порядку, а $C_k = (C_k^{(1)}; C_k^{(2)}; \dots; C_k^{(n)})^T$ — n -вимірний вектор, $k = 0, 1, \dots$.

Припустимо, що виконується умова

9°. $\det W_0 \neq 0$.

Тоді з рівняння (27) отримуємо

$$C_0 = -W_0^{-1} M \omega_0(0). \quad (28)$$

З рівняння (26) виділимо доданки, які містять коефіцієнти $C_k^{(j)}$, $j = \overline{1, n}$:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^l Mv_0^{(j)}(0)c_k^{(j)} + \sum_{j=l+1}^n Nv_0^{(j)}(T)c_k^{(j)} \\ &= p_{\frac{k-m}{n}} - Mw_{\frac{k}{n}}(0) - \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=1}^l c_i^{(j)} Mv_{k-i}^{(j)}(0) - \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=l+1}^n c_i^{(j)} Nv_{k-i}^{(j)}(T), \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

або

$$W_0 C_k = - \sum_{i=0}^{k-1} W_{k-i} C_i + p_{\frac{k-m}{n}} - Mw_{\frac{k}{n}}(0), \quad k = 1, 2, \dots$$

Враховуючи умову 9°, з останньої рівності отримаємо

$$C_k = W_0^{-1} \left(p_{\frac{k-m}{n}} - Mw_{\frac{k}{n}}(0) - \sum_{i=0}^{k-1} W_{k-i} C_i \right), \quad k = 1, 2, \dots \quad (29)$$

Отже, довели таку теорему.

Теорема 1. Якщо виконуються умови $I^\circ - 9^\circ$, то крайова задача (1), (2) має формальний розв'язок, який зображується у вигляді

$$\begin{aligned} x(t; \varepsilon) = & \varepsilon^{-m} \sum_{s=0}^{+\infty} \varepsilon^{\frac{s}{n}} \left(\sum_{j=1}^l \sum_{i=0}^s c_s^{(j)} v_{s-i}^{(j)}(t) \right) \exp \left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \left(\lambda_0(\tau) + \sum_{s=1}^{+\infty} \varepsilon^{\frac{s}{n}} \lambda_s^{(j)}(\tau) \right) d\tau \right) \\ & + \varepsilon^{-m} \sum_{s=0}^{+\infty} \varepsilon^{\frac{s}{n}} \left(\sum_{j=l+1}^h \sum_{i=0}^s c_i^{(j)} v_{s-i}^{(j)}(t) \right) \exp \left(\varepsilon^{-h} \int_T^t \left(\lambda_0(\tau) + \sum_{s=1}^{+\infty} \varepsilon^{\frac{s}{n}} \lambda_s^{(j)}(\tau) \right) d\tau \right) \\ & + \varepsilon^{-m} \sum_{s=0}^{+\infty} \varepsilon^s w_s(t) \exp \left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \alpha(\tau) d\tau \right), \end{aligned}$$

де коефіцієнти $v_k^{(j)}(t)$, $\lambda_k^{(j)}(t)$, $\omega_k(t)$, $c_k^{(j)}$, $k = 0, 1, \dots$, $j = \overline{1, n}$, визначено за формулами (6), (13), (14), (16), (19), (28), (29).

5. Асимптотичні властивості побудованого формального розв'язку крайової задачі. З використанням методів робіт [12, 19, 24] доведемо, що при виконанні умов $1^\circ - 9^\circ$ побудований формальний розв'язок є асимптотичним розвиненням точного розв'язку $x(t; \varepsilon)$ крайової задачі (1), (2) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для цього побудуємо r -наближення побудованого формального розв'язку

$$\begin{aligned} x_r(t; \varepsilon) = & \varepsilon^{-m} \sum_{s=0}^r \varepsilon^{\frac{s}{n}} \left(\sum_{j=1}^l \sum_{i=0}^s c_s^{(j)} v_{s-i}^{(j)}(t) \right) \exp \left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \left(\lambda_0(\tau) + \sum_{s=1}^r \varepsilon^{\frac{s}{n}} \lambda_s^{(j)}(\tau) \right) d\tau \right) \\ & + \varepsilon^{-m} \sum_{s=0}^r \varepsilon^{\frac{s}{n}} \left(\sum_{j=l+1}^h \sum_{i=0}^s c_i^{(j)} v_{s-i}^{(j)}(t) \right) \exp \left(\varepsilon^{-h} \int_T^t \left(\lambda_0(\tau) + \sum_{s=1}^r \varepsilon^{\frac{s}{n}} \lambda_s^{(j)}(\tau) \right) d\tau \right) \\ & + \varepsilon^{-m} \sum_{s=0}^r \varepsilon^s w_s(t) \exp \left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \alpha(\tau) d\tau \right). \end{aligned} \quad (30)$$

За побудовою вектор (30) задовольняє систему (1) і крайову умову (2) з точністю $O(\varepsilon^{\frac{r+1}{n}-m})$.

Позначимо через $y_r(t; \varepsilon) = x_*(t; \varepsilon) - x_r(t; \varepsilon)$ нев'язку — різницю між точним розв'язком $x_*(t; \varepsilon)$ задачі (1), (2) і r -наближеним формальним розв'язком $x_r(t; \varepsilon)$ цієї задачі.

Оскільки вектор (30) задовольняє систему (1) і крайову умову (2) з точністю $O(\varepsilon^{\frac{r+1}{n}-m})$, то виконуються рівності

$$\varepsilon^h B(t; \varepsilon) \frac{dx_r(t; \varepsilon)}{dt} - A(t; \varepsilon) x_r(t; \varepsilon) - f(t; \varepsilon) \exp \left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \alpha(\tau) d\tau \right) = \varepsilon^{\frac{r+1}{n}-m} a(t; \varepsilon),$$

$$Mx_r(0; \varepsilon) + Nx_r(T; \varepsilon) - p(\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{r+1}{n}-m} b(\varepsilon),$$

де $a(t; \varepsilon)$ — n -вимірний вектор-функція, рівномірно обмежена на відрізку $[0; T]$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, а $b(\varepsilon)$ — обмежений n -вимірний вектор.

Тоді нев'язка $y_r(t; \varepsilon)$ є розв'язком крайової задачі

$$\varepsilon^h B(t; \varepsilon) \frac{dy_r(t; \varepsilon)}{dt} = A(t; \varepsilon) y_r(t; \varepsilon) - \varepsilon^{\frac{r+1}{n}-m} a(t; \varepsilon), \quad (31)$$

$$My_r(0; \varepsilon) + Ny_r(T; \varepsilon) = -\varepsilon^{\frac{r+1}{n}-m} b(\varepsilon). \quad (32)$$

Оцінимо за нормою нев'язку $y_r(t; \varepsilon)$. Для цього проведемо додаткові міркування.

З попередніх викладок $\det B(t; \varepsilon) = \varepsilon (B_1(t) \tilde{\varphi}(t), \tilde{\psi}(t)) + O(\varepsilon^2)$. Тому обернена матриця $B^{-1}(t; \varepsilon)$ має особливість типу полюса при $\varepsilon = 0$ і її можна подати у вигляді

$$B^{-1}(t; \varepsilon) = \varepsilon^{-1} Q(t; \varepsilon),$$

де $Q(t; \varepsilon)$ — деяка квадратна матриця n -го порядку, рівномірно обмежена на відрізку $[0; T]$.

Помноживши систему (31) зліва на матрицю $\varepsilon^{-h-1} Q(t; \varepsilon)$, отримаємо

$$\frac{dy_r(t; \varepsilon)}{dt} = \varepsilon^{-h-1} \tilde{A}(t; \varepsilon) y_r(t; \varepsilon) - \varepsilon^{\frac{r+1}{n}-m-h-1} \tilde{a}(t; \varepsilon), \quad (33)$$

де $\tilde{A}(t; \varepsilon) = Q(t; \varepsilon) A(t; \varepsilon)$, $\tilde{a}(t; \varepsilon) = Q(t; \varepsilon) a(t; \varepsilon)$.

Поряд з крайовою задачею (33), (32) розглянемо відповідну однорідну задачу

$$\frac{dz}{dt} = \varepsilon^{-h-1} \tilde{A}(t; \varepsilon) z, \quad (34)$$

$$Mz(0; \varepsilon) + Nz(T; \varepsilon) = 0. \quad (35)$$

Фундаментальна матриця однорідної системи (34) має вигляд

$$Z(t; \varepsilon) = \left(V_r(t; \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{r+1}{n}-h-1}\right) \right) \Lambda_r(t; \varepsilon),$$

де $V_r(t; \varepsilon) = \left[v_r^{(1)}(t; \varepsilon), \dots, v_r^{(l)}(t; \varepsilon), v_r^{(l+1)}(t; \varepsilon), \dots, v_r^{(n)}(t; \varepsilon) \right]$ — квадратна матриця n -го порядку, стовпцями якої є вектори $v_r^{(j)}(t; \varepsilon)$, $j = \overline{1, n}$, а

$$\begin{aligned} \Lambda_r(t; \varepsilon) &= \Lambda_r^{(1)}(0; t; \varepsilon) + \Lambda_r^{(2)}(T; t; \varepsilon), \\ \Lambda_r^{(1)}(0; t; \varepsilon) &= \text{diag} \left\{ \exp \left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \lambda_r^{(1)}(\tau; \varepsilon) d\tau \right), \dots, \exp \left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \lambda_r^{(l)}(\tau; \varepsilon) d\tau \right), 0, \dots, 0 \right\}, \\ \Lambda_r^{(2)}(T; t; \varepsilon) &= \text{diag} \left\{ 0, \dots, 0, \exp \left(\varepsilon^{-h} \int_T^t \lambda_r^{(l+1)}(\tau; \varepsilon) d\tau \right), \dots, \exp \left(\varepsilon^{-h} \int_T^t \lambda_r^{(n)}(\tau; \varepsilon) d\tau \right) \right\}. \end{aligned}$$

Згідно з [24] частинний розв'язок неоднорідної системи (33) має вигляд

$$\begin{aligned} \tilde{y}_r(t; \varepsilon) &= -\varepsilon^{\frac{r+1}{n}-m-h-1} \left(V_r(t; \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{r+1}{n}-h-1}\right) \right) \\ &\quad \times \int_0^t \Lambda_r^{(1)}(\tau; t; \varepsilon) \left(V_r^{-1}(\tau; \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{r+1}{n}-h-1}\right) \right) \tilde{a}(\tau; \varepsilon) d\tau - \varepsilon^{\frac{r+1}{n}-m-h-1} \\ &\quad \times \left(V_r(t; \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{r+1}{n}-h-1}\right) \right) \int_T^t \Lambda_r^{(2)}(\tau; t; \varepsilon) \left(V_r^{-1}(\tau; \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{r+1}{n}-h-1}\right) \right) \tilde{a}(\tau; \varepsilon) d\tau. \end{aligned} \quad (36)$$

Тоді загальний розв'язок неоднорідної системи (33) набуває вигляду

$$y_r(t; \varepsilon) = \left(V_r(t; \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{r+1}{n}-h-1}\right) \right) \Lambda_r(t; \varepsilon) c(\varepsilon) + \tilde{y}_r(t; \varepsilon). \quad (37)$$

Вектор $c(\varepsilon)$ визначимо з крайової умови (32). Для цього підставимо вектор (37) у крайову умову (32). Тоді отримаємо

$$\begin{aligned} &M \left(V_r(0; \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{r+1}{n}-h-1}\right) \right) \Lambda_r(0; \varepsilon) c(\varepsilon) \\ &\quad - \varepsilon^{\frac{r+1}{n}-m-h-1} M \left(V_r(0; \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{r+1}{n}-h-1}\right) \right) \\ &\quad \times \int_T^0 \Lambda_r^{(2)}(\tau; 0; \varepsilon) \left(V_r^{-1}(\tau; \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{r+1}{n}-h-1}\right) \right) \tilde{a}(\tau; \varepsilon) d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + N \left(V_r(T; \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{r+1}{n}-h-1}\right) \right) \Lambda_r(T; \varepsilon) c(\varepsilon) \\
& - \varepsilon^{\frac{r+1}{n}-m-h-1} N \left(V_r(T; \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{r+1}{n}-h-1}\right) \right) \\
& \times \int_0^T \Lambda_r^{(1)}(\tau; T; \varepsilon) \left(V_r^{-1}(\tau; \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{r+1}{n}-h-1}\right) \right) \tilde{a}(\tau; \varepsilon) d\tau = -\varepsilon^{\frac{r+1}{n}-m} b(\varepsilon). \quad (38)
\end{aligned}$$

Перетворимо доданки рівняння (38), які містять вектор $c(\varepsilon)$. Оскільки згідно з умовою 8° функції $\exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^T \lambda_r^{(i)}(\tau; \varepsilon) d\tau\right)$, $i = \overline{1, l}$, і $\exp\left(\varepsilon^{-h} \int_T^0 \lambda_r^{(j)}(\tau; \varepsilon) d\tau\right)$, $j = \overline{l+1, n}$, прямують до нуля швидше, ніж ε^{rh} при $\varepsilon \rightarrow 0$, то

$$\begin{aligned}
& \left[N v_r^{(1)}(T; \varepsilon), \dots, N v_r^{(l)}(T; \varepsilon), 0, \dots, 0 \right] \Lambda_r^{(1)}(0; T; \varepsilon) \\
& + \left[0, \dots, 0, M v_r^{(l+1)}(0; \varepsilon), \dots, M v_r^{(n)}(0; \varepsilon) \right] \Lambda_r^{(2)}(T; 0; \varepsilon) = O(\varepsilon^{(r+1)h}).
\end{aligned}$$

Тоді рівняння (38) набуде вигляду

$$\begin{aligned}
& \left(W(\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{r+1}{n}-h-1}\right) \right) c(\varepsilon) \\
& = -\varepsilon^{\frac{r+1}{n}-m} b(\varepsilon) + \varepsilon^{\frac{r+1}{n}-m-h-1} M \left(V_r(0; \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{r+1}{n}-h-1}\right) \right) \\
& \times \int_T^0 \Lambda_r^{(2)}(\tau; 0; \varepsilon) \left(V_r^{-1}(\tau; \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{r+1}{n}-h-1}\right) \right) \tilde{a}(\tau; \varepsilon) d\tau + \varepsilon^{\frac{r+1}{n}-m-h-1} N \\
& \times \left(V_r(T; \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{r+1}{n}-h-1}\right) \right) \int_0^T \Lambda_r^{(1)}(\tau; T; \varepsilon) \left(V_r^{-1}(\tau; \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{r+1}{n}-h-1}\right) \right) \tilde{a}(\tau; \varepsilon) d\tau, \quad (39)
\end{aligned}$$

де

$$W(\varepsilon) = \sum_{s=0}^r \varepsilon^s W_s,$$

$W_s = \left[M v_s^{(1)}(0), \dots, M v_s^{(l)}(0), N v_s^{(l+1)}(T), \dots, N v_s^{(n)}(T) \right]$ — квадратна матриця n -го порядку, стовпцями якої є вектори $M v_s^{(1)}(0), \dots, M v_s^{(l)}(0), N v_s^{(l+1)}(T), \dots, N v_s^{(n)}(T)$.

Матриця $W(\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{r+1}{n}-h-1}\right)$ є невиродженою при досить малих $\varepsilon > 0$ завдяки невиродженості матриці W_0 згідно з умовою 9° і неперервності елементів матриці $W(\varepsilon)$.

Оскільки матриця $W(\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{r+1}{n}-h-1}\right)$ є невиродженою, то до неї існує обернена матриця $W^{-1}(\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{r+1}{n}-h-1}\right)$. Тоді з рівняння (39) визначимо вектор $c(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}
c(\varepsilon) & = -\varepsilon^{\frac{r+1}{n}-m} \left(W^{-1}(\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{r+1}{n}-h-1}\right) \right) b(\varepsilon) + \varepsilon^{\frac{r+1}{n}-m-h-1} M \left(W^{-1}(\varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{r+1}{n}-h-1}\right) \right) \\
& \times \left(V_r(0; \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{r+1}{n}-h-1}\right) \right) \int_T^0 \Lambda_r^{(2)}(\tau; 0; \varepsilon) \left(V_r^{-1}(\tau; \varepsilon) + O\left(\varepsilon^{\frac{r+1}{n}-h-1}\right) \right) \tilde{a}(\tau; \varepsilon) d\tau
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \varepsilon^{\frac{r+1}{n}-m-h-1} \left(W^{-1}(\varepsilon) + O(\varepsilon^{\frac{r+1}{n}-h-1}) \right) N \left(V_r(T; \varepsilon) + O(\varepsilon^{\frac{r+1}{n}-h-1}) \right) \\
& \times \int_0^T \Lambda_r^{(1)}(\tau; T; \varepsilon) \left(V_r^{-1}(\tau; \varepsilon) + O(\varepsilon^{\frac{r+1}{n}-h-1}) \right) \tilde{a}(\tau; \varepsilon) d\tau.
\end{aligned} \quad (40)$$

Отже, розв'язок $y_r(t; \varepsilon)$ крайової задачі (32), (33) визначається за формулою (37), у якій вектори $\tilde{y}_r(t; \varepsilon)$ і $c(\varepsilon)$ визначаються за формулами (36) і (40) відповідно.

Перейдемо тепер до оцінки вектора $y_r(t; \varepsilon)$ за нормою. Оскільки матриця $W(\varepsilon)$ є невинродженою і обмеженою при досить малих $\varepsilon > 0$, то обернена матриця $W^{-1}(\varepsilon)$ є також обмеженою при досить малих $\varepsilon > 0$:

$$\|W^{-1}(\varepsilon)\| \leq c_1, \quad (41)$$

де c_1 — деяка стала, яка не залежить від ε .

Відповідно до умови напівстійкості 8°, неважко переконатися, що $\operatorname{Re}(\lambda_r^{(j)}(t; \varepsilon)) < 0$, $j = \overline{1, l}$, а $\operatorname{Re}(\lambda_r^{(j)}(t; \varepsilon)) > 0$, $j = \overline{l+1, n} \forall t \in [0; T]$. Звідси випливає обмеженість матриць

$$\|\Lambda_r(t; \varepsilon)\| \leq c_2; \quad \|\Lambda_r^{(2)}(\tau; 0; \varepsilon)\| \leq c_3, \quad \tau \leq T; \quad \|\Lambda_r^{(1)}(\tau; T; \varepsilon)\| \leq c_4, \quad \tau \leq T; \quad (42)$$

$$\|\Lambda_r^{(1)}(\tau; t; \varepsilon)\| \leq c_5, \quad \tau \leq t; \quad \|\Lambda_r^{(2)}(\tau; t; \varepsilon)\| \leq c_6, \quad \tau \leq t, \quad (43)$$

де c_i , $i = \overline{2, 6}$, — деякі сталі, які не залежать від ε .

Враховуючи оцінки (41)–(43) і обмеженість усіх матричних і векторних функцій, які містяться у формулах (36), (37), (40), маємо

$$\|y_r(t; \varepsilon)\| \leq C \varepsilon^{\frac{r+1}{n}-m-h-1}$$

або

$$\|x_*(t; \varepsilon) - x_r(t; \varepsilon)\| \leq C \varepsilon^{\frac{r+1}{n}-m-h-1}, \quad (44)$$

де C — стала, яка не залежить від параметра ε .

Справджується така теорема.

Теорема 2. Якщо виконуються умови 1°–9°, то побудований формальний розв'язок $x(t; \varepsilon)$ крайової задачі (1), (2) є асимптотичним розвиненням точного розв'язку $x_*(t; \varepsilon)$ цієї задачі при $\varepsilon \rightarrow 0$, причому правильна формула (44), у якій $x_r(t; \varepsilon)$ — r -наближення побудованого формального розв'язку $x(t; \varepsilon)$ крайової задачі (1), (2).

Зауваження 3. Для того щоб згідно з асимптотичною формулою (44) побудований формальний розв'язок $x_r(t; \varepsilon)$ крайової задачі (1), (2) досить добре наближався до точного розв'язку $x_*(t; \varepsilon)$ цієї задачі при $\varepsilon \rightarrow 0$, потрібно, щоб $r > n(m + h + 1) - 1$.

Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів. Усі необхідні дані містяться в статті. Всі автори зробили рівномірний внесок у цю роботу. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Література

1. G. D. Birkhoff, *On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter*, Trans. Amer. Math. Soc., № 9, 219–231 (1908).
2. Я. Д. Тамаркин, *О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды*, тип. М. П. Фроловой, Петроград (1917).
3. M. Hukuhara, *Sur les points singuliers des équations différentielles linéaires*, J. Fac. Sci. Univ. Hokkaido Math., № 2, 13–81 (1936).
4. С. Ф. Фещенко, *Об асимптотическом расщеплении системы линейных дифференциальных уравнений*, Укр. мат. журн., 7, № 2, 167–179 (1955).
5. С. Ф. Фещенко, *Об асимптотическом расщеплении системы линейных дифференциальных уравнений*, Укр. мат. журн., 7, № 4, 252–443 (1955).
6. H. L. Turrin, *Asymptotic expansions of solutions systems of ordinary linear differential equations containing a parameter*, Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations, vol. II, Princeton University Press, Princeton, NJ, 81–116 (1952).
7. W. Wasow, *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*, Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc., New York, London, Sydney (1965).
8. Н. И. Шкіль, *Асимптотическое поведение линейных систем в случае кратных корней характеристического уравнения*, Укр. мат. журн., 16, № 4, 383–392 (1962).
9. Н. И. Шкіль, *Асимптотическое решение системы линейных дифференциальных уравнений в случае кратных корней характеристического уравнения*, Изв. вузов. Математика, 39, № 2, 176–185 (1964).
10. Н. И. Шкіль, *Построение общего асимптотического решения системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром*, Изв. вузов. Математика, № 1, 163–169 (1966).
11. Г. С. Жукова, *Асимптотическое интегрирование обыкновенных линейных дифференциальных уравнений*, Изд-во Воронеж. ун-та, Воронеж (1988).
12. А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець, *Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями*, Вища шк., Київ (2000).
13. О. А. Бойчук, Л. М. Шегда, *Вироджені нетерові крайові задачі*, Нелін. коливання, 10, № 3, 303–312 (2007); **English translation:** Nonlinear Oscill., 10, № 3, 306–314 (2007).
14. P. Samusenko, *Asymptotic integration of singularly perturbed linear systems of differential-algebraic equations*, Miskolc Math. Notes, 17, № 2, 1033–1047 (2016).
15. S. L. Campbell, *A general form for solvable linear time varying singular systems of differential equations*, SIAM J. Math. Anal., 18, № 14, 1101–1115 (1987).
16. S. L. Campbell, L. R. Petzold, *Canonical forms and solvable singular systems of differential equations*, SIAM J. Algebraic Discrete Methods, № 4, 517–521 (1983).
17. C. W. Gear, L. R. Petzold, *ODE methods for the solutions of differential-algebraic systems*, SIAM J. Numer. Anal., 24, № 4, 716–728 (1984).
18. E. Griepentrog, R. Marz, *Differential-algebraic equations and their numerical treatment*, BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig (1986).
19. В. П. Яковець, М. Б. Віра, *Про побудову асимптотичних розв'язків двоточкових крайових задач для вироджених сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь*, Нелін. коливання, 13, № 2, 272–286 (2010); **English translation:** Nonlinear Oscill., 13, № 2, 295–309 (2010).
20. М. Б. Віра, *Асимптотика розв'язків крайових задач для лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь у випадку кратного спектра граничної матриці*, Нелін. коливання, 21, № 4, 444–456 (2018); **English translation:** J. Math. Sci. (N. Y.), 246, № 3, 303–316 (2020).
21. М. Б. Віра, *Двоточкова крайова задача для виродженої сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь у випадку кратного спектра головного оператора*, Праці Ін-ту прикл. математики і механіки НАН України, 18, 19–28 (2009).
22. M. B. Vira, P. F. Samusenko, *Asymptotic solutions of boundary value problem for singularly perturbed system of differential-algebraic equations*, Carpathian Math. Publ., 14, № 1, 49–60 (2022).
23. А. Б. Васильева, В. Ф. Бутузов, *Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений*, Высш. шк., Москва (1990).
24. С. П. Пафик, *Асимптотичне розв'язання двоточнової крайової задачі для лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь у некритичному та критичному стійких випадках*, Вісник КНУ імені Тараса Шевченка. Математика. Механіка, 1(40), 19–25 (2019).

Одержано 30.01.24,
після доопрацювання — 11.02.24