

РЯДИ ЗА БІОРТОГОНАЛЬНИМИ СИСТЕМАМИ ФУНКЦІЙ ТА ЇХНЄ ЗАСТОСУВАННЯ ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ РІВНЯННЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Ольга Веселовська, Богдан Пахолок

Національний університет “Львівська політехніка”

вул. С. Бандери, 12, Львів, 79013, Україна

*e-mail: olha.v.veselovska@lpnu.ua, відповідальна за листування,
bohdan.b.pakholok@lpnu.ua*

We investigate properties of the family of functions of a complex variable arising from the search of the expansion coefficients in the trigonometric system of functions of the solution of the Helmholtz equation in the cylindrical coordinate system in the form of homogeneous polynomials in two biorthogonal systems of functions. We construct associated functions biorthogonal to these functions on closed curves of a complex plane and establish sufficient conditions for the expansion of analytic functions into series in the considered system of functions. The application of biorthogonal systems of functions for construction of solutions of some boundary-value problems for the Helmholtz equation in the cylindrical coordinate system is given.

Досліджено властивості сім'ї функцій комплексної змінної, які виникають при знаходженні коефіцієнтів розвинення за тригонометричною системою функцій розв'язку рівняння Гельмгольца у циліндричній системі координат у вигляді однорідних поліномів за двома біортогональними системами функцій. Побудовано асоційовані функції, біортогональні з цими функціями на замкнених кривих комплексної площини, та встановлено достатні умови розвинення аналітичних функцій у ряди за розглядуваною системою функцій. Наведено застосування біортогональних систем функцій для побудови розв'язків деяких крайових задач для рівняння Гельмгольца у циліндричній системі координат.

Вступ. При розв'язуванні багатьох задач, у тому числі прикладного характеру, використовують розвинення функцій у ряди за певними системами функцій. Значного розвитку набули методи розв'язання диференціальних рівнянь, що ґрунтуються на розвиненнях функцій у ряди за системами ортогональних поліномів та інших ортогональних функцій однієї чи декількох змінних. Більш загальними, ніж ортогональні, є біортогональні системи функцій.

Біортогональні системи функцій комплексної змінної та методи розвинення аналітичних функцій у ряди за цими системами розглянуто в роботах [1 – 10]. Знаходження коефіцієнтів рядів ґрунтується на властивості біортогональності, і вони виражаються через похідні функцій, які розвиваються у ці ряди.

У [11] отримано розв'язки бігармонійного рівняння та рівняння Гельмгольца у декартових координатах у вигляді однорідних поліномів за двома біортогональними системами функцій і встановлено достатні умови розвинення аналітичних функцій у ряди за ними.

Розв'язки рівняння Гельмгольца у площині, півплощині та смузі одержано у вигляді рядів за системами однорідних поліномів.

У [12] методом контурних інтегралів знайдено коефіцієнти розвинення за системою тригонометричних функцій розв'язку рівняння Гельмгольца у циліндричній системі координат у вигляді однорідних поліномів за двома біортогональними системами функцій.

У цій статті досліджено властивості зазначених біортогональних систем функцій, встановлено достатні умови розвинення аналітичних функцій у ряди за ними та наведено їхнє застосування до побудови розв'язків деяких крайових задач для рівняння Гельмгольца у циліндричній системі координат. Результати роботи узагальнюють відповідні результати з [6].

2. Властивості біортогональних функцій. У роботі [12] уведено систему $\{b_n^\mu(z)\}_{n=0}^\infty$ цілих функцій комплексної змінної z :

$$b_n^\mu(z) = \left(\left[\frac{n+1}{2} \right] + \mu \right)! \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2^{2l} l! (l + \left[\frac{n+1}{2} \right] + \mu)!} z^{n+2l}, \quad (1)$$

де $n, \mu = 0, 1, 2, \dots$, $[x]$ — ціла частина x .

Із співвідношень (1) отримаємо вирази функцій $b_n^\mu(z)$ для парних і непарних значень n відповідно:

$$\begin{aligned} b_{2n}^\mu(z) &= (n + \mu)! \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2^{2l} l! (l + n + \mu)!} z^{2(n+l)} \\ &= (-1)^n 2^{2n} n! (n + \mu)! \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(-1)^j C_j^n}{2^{2j} j! (j + \mu)!} z^{2j}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$b_{2n+1}^\mu(z) = (-1)^n 2^{2n} n! (n + \mu + 1)! \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(-1)^j C_j^n}{2^{2j} j! (j + \mu + 1)!} z^{2j+1}.$$

Дослідимо властивості цих функцій.

Твердження 1. Для функцій $b_n^\mu(z)$ виконуються оцінки

$$|b_n^\mu(z)| \leq e^{|z|} |z|^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

Доведення. Використовуючи зображення функцій Бесселя першого роду [13, с. 12]

$$J_\lambda(z) = \left(\frac{z}{2} \right)^\lambda \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2^{2l} l! \Gamma(l + \lambda + 1)} z^{2l},$$

де $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функція, і співвідношення (2), отримуємо

$$b_{2n}^\mu(z) = 2^{n+\mu} (n + \mu)! z^{n-\mu} J_{n+\mu}(z),$$

$$b_{2n+1}^\mu(z) = 2^{n+\mu+1} (n + \mu + 1)! z^{n-\mu} J_{n+\mu+1}(z).$$

Звідси згідно з відомою оцінкою [13, с. 14] $|J_\mu(z)| \leq \left| \frac{z}{2} \right|^\mu \frac{e^{|y|}}{\Gamma(\mu + 1)}$, $y = \operatorname{Im} z$, маємо

$$|b_{2n}^\mu(z)| \leq 2^{n+\mu} (n + \mu)! |z|^{n-\mu} \frac{|z|^{n+\mu} e^{|y|}}{2^{n+\mu} (n + \mu)!} \leq e^{|z|} |z|^{2n}.$$

Аналогічно

$$|b_{2n+1}^\mu(z)| \leq e^{|z|} |z|^{2n+1}.$$

Об'єднуючи отримані нерівності, одержуємо оцінки (3).

Нехай $\delta_{nm} = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n, \end{cases}$ — символ Кронекера.

Твердження 2. Система степенів $\{z^n\}_{n=0}^\infty$ однозначно виражається через функції $b_n^\mu(z)$, тобто справджуються співвідношення

$$\begin{aligned} z^{2n} &= 2^{2n} n! (n + \mu)! \sum_{r=n}^{\infty} \frac{C_r^n}{2^{2r} r! (r + \mu)!} b_{2r}^\mu(z), \\ z^{2n+1} &= 2^{2n} n! (n + \mu + 1)! \sum_{r=n}^{\infty} \frac{C_r^n}{2^{2r} r! (r + \mu + 1)!} b_{2r+1}^\mu(z), \end{aligned} \quad (4)$$

причому ряди в (4) збігаються рівномірно у крузі $|z| \leq R$, $R < \infty$.

Доведення. Згідно зі співвідношенням (2), змінюючи порядок підсумовування та враховуючи відому комбінаторну тотожність

$$\sum_{j=n}^m (-1)^j C_j^n C_m^j = (-1)^m \delta_{nm}, \quad (5)$$

отримаємо

$$\begin{aligned} \sum_{r=n}^{\infty} \frac{C_r^n}{2^{2r} r! (r + \mu + 1)!} b_{2r+1}^\mu(z) &= \sum_{r=n}^{\infty} (-1)^r C_r^n \sum_{k=r}^{\infty} \frac{(-1)^k C_k^r}{2^{2k} k! (k + \mu + 1)!} z^{2k+1} \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! (k + \mu + 1)!} z^{2k+1} \sum_{r=n}^k (-1)^r C_r^n C_k^r \\ &= \frac{z^{2n+1}}{2^{2n} n! (n + \mu + 1)!}, \end{aligned}$$

що доводить останнє співвідношення з (4). Інші співвідношення встановлюємо аналогічно.

Далі, завдяки (3) для $|z| \leq R$ знаходимо

$$\left| \sum_{r=n}^{\infty} \frac{C_r^n b_{2r+1}^\mu(z)}{2^{2r} r! (r + \mu + 1)!} \right| \leq \frac{e^R}{n! 2^{2n}} \sum_{r=n}^{\infty} \frac{R^{2r+1}}{(r + 1)!},$$

що доводить рівномірну збіжність ряду з (4).

Розглянемо функції $\omega_m^\mu(z)$, асоційовані [10, с. 160] з функціями $b_n^\mu(z)$:

$$\omega_m^\mu(z) = \frac{1}{\left(\left[\frac{m+1}{2}\right] + \mu\right)!} \sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{\left(\left[\frac{m+1}{2}\right] - k + \mu\right)!}{2^{2k} k!} \frac{1}{z^{m-2k+1}}, \quad (6)$$

де $m = 0, 1, 2, \dots$. Із співвідношень (6) отримуємо вирази функцій $\omega_m^\mu(z)$ для парних і непарних значень індексів m :

$$\begin{aligned}\omega_{2m}^\mu(z) &= \frac{1}{(m+\mu)!} \sum_{k=0}^m \frac{(m-k+\mu)!}{2^{2k} k!} \frac{1}{z^{2(m-k)+1}} \\ &= \frac{1}{(m+\mu)!} \sum_{s=0}^m \frac{(s+\mu)!}{2^{2(m-s)} (m-s)!} \frac{1}{z^{2s+1}} \\ &= \frac{1}{2^{2m} m! (m+\mu)!} \sum_{s=0}^m 2^{2s} s! (s+\mu)! C_m^s \frac{1}{z^{2s+1}}, \\ \omega_{2m+1}^\mu(z) &= \frac{1}{2^{2m} m! (m+\mu+1)!} \sum_{s=0}^m 2^{2s} s! (s+\mu+1)! C_m^s \frac{1}{z^{2s+2}}.\end{aligned}\tag{7}$$

Зауважимо, що функції $\omega_m^\mu(z)$ аналітичні в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Твердження 3. Для функцій $\omega_m^\mu(z)$ виконуються оцінки

$$|\omega_m^\mu(t)| \leq \frac{1}{|t|^{m+1}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{|t|^{2k}}{k!}, \quad 0 < |t| < \infty.\tag{8}$$

Доведення. Враховуючи співвідношення (7), знаходимо

$$|\omega_{2m}^\mu(t)| \leq \frac{1}{(m+\mu)!} \sum_{k=0}^m \frac{(m-k+\mu)!}{2^{2k} k!} \frac{1}{|t|^{2(m-k)+1}} \leq \frac{1}{|t|^{2m+1}} \sum_{k=0}^m \frac{|t|^{2k}}{k!}.$$

Аналогічно

$$|\omega_{2m+1}^\mu(t)| \leq \frac{1}{|t|^{2m+2}} \sum_{k=0}^m \frac{|t|^{2k}}{k!}.$$

З отриманих нерівностей випливає оцінка (8).

Теорема 1. Системи функцій $\{b_n^\mu(z)\}_{n=0}^\infty$, $\{\omega_m^\mu(z)\}_{m=0}^\infty$ біортogonalні на довільному замкненому контурі Γ , що охоплює нульову точку, тобто

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} b_n^\mu(z) \omega_m^\mu(z) dz = \delta_{nm}, \quad n, m \in \mathbb{N}.\tag{9}$$

Доведення. На підставі співвідношень (2), (7) і відомого інтеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{(z-a)^n} = \delta_{1n},$$

де γ — довільний замкнений контур, що охоплює точку a і однократно пробігається у додатному напрямку, одержимо

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} b_{2n}^\mu(z) \omega_{2m}^\mu(z) dz = \frac{(-1)^n 2^{2(n-m)} n! (n+\mu)!}{m! (m+\mu)!}$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k C_k^m}{2^{2k} k! (k + \mu)!} \sum_{j=0}^m 2^{2j} j! (j + \mu)! C_m^j \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z^{2(j-k)+1}} \\ & = \frac{(-1)^n 2^{2(n-m)} n! (n + \mu)!}{m! (m + \mu)!} \sum_{j=n}^m (-1)^j C_j^m C_m^j. \end{aligned}$$

Аналогічно

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} b_{2n+1}^{\mu}(z) \omega_{2m+1}^{\mu}(z) dz = \frac{(-1)^n 2^{2(n-m)} n! (n + \mu + 1)!}{m! (m + \mu + 1)!} \sum_{j=n}^m (-1)^j C_j^m C_m^j.$$

Враховуючи комбінаторну тотожність (5), приходимо до співвідношення (9).

Рівності

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} b_{2n}^{\mu}(z) \omega_{2m+1}^{\mu}(z) dz = 0, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} b_{2n+1}^{\mu}(z) \omega_{2m}^{\mu}(z) dz = 0$$

очевидні, тому що відсутні доданки з z^{-1} .

Теорема 2. *Справджується розвинення*

$$\frac{1}{t - z} = \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{\mu}(z) \omega_m^{\mu}(t), \quad |t| > |z|, \quad (10)$$

причому ряд у (10) рівномірно збігається для $|z| \leq r$, $|t| \geq \rho$, де $0 < r < \rho < \infty$.

Доведення. Підставивши у праву частину співвідношення (10) вирази для функцій $b_m^{\mu}(z)$ та асоційованих з ними функцій $\omega_m^{\mu}(t)$, отримаємо

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{\mu}(z) \omega_m^{\mu}(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m}^{\mu}(z) \omega_{2m}^{\mu}(t) + \sum_{m=0}^{\infty} b_{2m+1}^{\mu}(z) \omega_{2m+1}^{\mu}(t) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sum_{j=m}^{\infty} \frac{(-1)^j C_j^m}{2^{2j} j! (j + \mu)!} z^{2j} \sum_{s=0}^m 2^{2s} s! (s + \mu)! C_m^s \frac{1}{t^{2s+1}} \\ &\quad + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \sum_{j=m}^{\infty} \frac{(-1)^j C_j^m}{2^{2j} j! (j + \mu + 1)!} z^{2j+1} \sum_{s=0}^m 2^{2s} s! (s + \mu + 1)! C_m^s \frac{1}{t^{2s+2}}. \end{aligned}$$

Змінивши у сумах порядок підсумовування, матимемо

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{\mu}(z) \omega_m^{\mu}(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2^{2j} j! (j + \mu)!} z^{2j} \sum_{m=0}^j (-1)^m C_j^m \\ &\quad \times \sum_{s=0}^m 2^{2s} s! (s + \mu)! C_m^s \frac{1}{t^{2s+1}} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2^{2j} j! (j + \mu + 1)!} z^{2j+1} \\ &\quad \times \sum_{m=0}^j (-1)^m C_j^m \sum_{s=0}^m 2^{2s} s! (s + \mu + 1)! C_m^s \frac{1}{t^{2s+2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2^{2j} j! (j + \mu)!} z^{2j} \sum_{s=0}^j 2^{2s} s! (s + \mu)! \frac{1}{t^{2s+1}} \sum_{m=s}^j (-1)^m C_j^m C_m^s \\
&\quad + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2^{2j} j! (j + \mu + 1)!} z^{2j+1} \sum_{s=0}^j 2^{2s} s! (s + \mu + 1)! \frac{1}{t^{2s+2}} \sum_{m=s}^j (-1)^m C_j^m C_m^s.
\end{aligned}$$

Використавши комбінаторну тотожність (5), остаточно знаходимо

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m^{\mu}(z) \omega_m^{\mu}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j}}{t^{2j+1}} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^{2j+1}}{t^{2j+2}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{t^{j+1}} = \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{t}} = \frac{1}{t - z}.$$

Врахувавши оцінки (3) і (8), одержимо для $|z| \leq r$, $|t| \geq \rho$, $\rho > r$:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{m=0}^{\infty} b_m^{\mu}(z) \omega_m^{\mu}(t) \right| &\leq \sum_{m=0}^{\infty} |b_{2m}^{\mu}(z)| |\omega_{2m}^{\mu}(t)| + \sum_{m=0}^{\infty} |b_{2m+1}^{\mu}(z)| |\omega_{2m+1}^{\mu}(t)| \\
&\leq e^{|z|} \left(\sum_{m=0}^{\infty} |z|^{2m} \frac{1}{|t|^{2m+1}} \sum_{k=0}^m \frac{|t|^{2k}}{k!} + \sum_{m=0}^{\infty} |z|^{2m+1} \frac{1}{|t|^{2m+2}} \sum_{k=0}^m \frac{|t|^{2k}}{k!} \right) \\
&= e^{|z|} \left(\frac{1}{|t|} \sum_{m=0}^{\infty} \left| \frac{z}{t} \right|^{2m} \sum_{k=0}^m \frac{|t|^{2k}}{k!} + \frac{|z|}{|t|^2} \sum_{m=0}^{\infty} \left| \frac{z}{t} \right|^{2m} \sum_{k=0}^m \frac{|t|^{2k}}{k!} \right) \\
&= e^{|z|} \left(\frac{1}{|t|} + \frac{|z|}{|t|^2} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \left| \frac{z}{t} \right|^{2m} \sum_{k=0}^m \frac{|t|^{2k}}{k!} \\
&= \frac{e^{|z|} (|t| + |z|)}{|t|^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^{2k}}{k!} \sum_{m=k}^{\infty} \left| \frac{z}{t} \right|^{2m} \\
&= \frac{e^{|z|} (|t| + |z|)}{|t|^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|t|^{2k}}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \left| \frac{z}{t} \right|^{2j+2k} \\
&= \frac{e^{|z|} (|t| + |z|)}{|t|^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|z|^{2k}}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \left| \frac{z}{t} \right|^{2j} \\
&= \frac{e^{|z|+|z|^2} (|t| + |z|)}{|t|^2} \cdot \frac{1}{1 - \left| \frac{z}{t} \right|^2} = \frac{e^{|z|(1+|z|)}}{|t| - |z|} \leq \frac{e^{r(1+r)}}{\rho - r},
\end{aligned}$$

що доводить рівномірну збіжність ряду (10).

Теорема 3. Система $\{b_n^{\mu}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ функцій є базисом Шаудера у просторі A_r однозначних аналітичних у крузі $|z| < r$ ($r > 0$) функцій комплексної змінної.

Доведення. Система $\{b_n^{\mu}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ є базисом в A_r [10, с. 161], оскільки виконуються такі умови:

- а) функції $\omega_m^{\mu}(z)$ аналітичні в області $|z| > \rho > 0$;

б) коефіцієнти у виразах (7) асоційованих функцій $\omega_m^\mu(z)$ задовольняють умови

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [2^{2s} s! (s + \mu)! C_m^s]^{\frac{1}{2s}} = \rho'_m < r,$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [2^{2s} s! (s + \mu + 1)! C_m^s]^{\frac{1}{2s+1}} = \rho''_m < r,$$

оскільки $C_m^s = 0$, якщо $s > m$, і, відповідно, $\rho'_m = 0$, $\rho''_m = 0$.

в) справджується розвинення (10) і за теоремою 2 відповідний ряд збігається рівномірно для всіх z і t таких, що $|z| \leq r$, $|t| \geq \rho$, де $0 < r < \rho < \infty$.

3. Розвинення функцій за системою $\{b_n^\mu(z)\}_{n=0}^\infty$.

Твердження 4. Нехай $f(z)$ — сума ряду за функціями $b_n^\mu(z)$, рівномірно збіжного у крузі $|z| \leq R$, $R < \infty$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^\mu b_n^\mu(z). \quad (11)$$

Тоді коефіцієнти a_n^μ визначаються за формулами

$$a_m^\mu = \frac{1}{\left(\left[\frac{m+1}{2}\right] + \mu\right)!} \sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{\left(\left[\frac{m+1}{2}\right] - k + \mu\right)!}{2^{2k} k!} \frac{f^{(m-2k)}(0)}{(m-2k)!}, \quad (12)$$

де $m = 0, 1, 2, \dots$

Доведення. Помножимо ліву та праву частини рівності (11) на функцію $\omega_m^\mu(z)$ і проінтегруємо отримане співвідношення вздовж контура $K = \{z : |z| = r\}$, $0 < r < R$. Тоді, завдяки (9) і (6), отримаємо

$$\begin{aligned} a_m^\mu &= \frac{1}{2\pi i} \int_K f(z) \omega_m^\mu(z) dz \\ &= \frac{1}{\left(\left[\frac{m+1}{2}\right] + \mu\right)!} \sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{\left(\left[\frac{m+1}{2}\right] - k + \mu\right)!}{2^{2k} k!} \frac{1}{2\pi i} \int_K \frac{f(z)}{z^{m-2k+1}} dz \\ &= \frac{1}{\left(\left[\frac{m+1}{2}\right] + \mu\right)!} \sum_{k=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{\left(\left[\frac{m+1}{2}\right] - k + \mu\right)!}{2^{2k} k!} \frac{f^{(m-2k)}(0)}{(m-2k)!}, \end{aligned}$$

де $m = 0, 1, 2, \dots$

Із співвідношень (12) знаходимо вирази для коефіцієнтів a_m^μ окремо для парних і непарних значень індексів m :

$$a_{2m}^\mu = \frac{1}{(m + \mu)!} \sum_{k=0}^m \frac{(m - k + \mu)!}{2^{2k} k!} \frac{f^{(2m-2k)}(0)}{(2m - 2k)!}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(m+\mu)!} \sum_{j=0}^m \frac{(j+\mu)!}{2^{2(m-j)}(m-j)!} \frac{f^{(2j)}(0)}{(2j)!} \\
&= \frac{\mu!}{2^{2m}m!(m+\mu)!} \sum_{j=0}^m \frac{2^{2j}C_m^j C_{j+\mu}^\mu}{C_{2j}^j} f^{(2j)}(0), \\
&a_{2m+1}^\mu = \frac{\mu!}{2^{2m}m!(m+\mu+1)!} \sum_{j=0}^m \frac{2^{2j}C_m^j C_{j+\mu+1}^\mu}{C_{2j+1}^j} f^{(2j+1)}(0).
\end{aligned} \tag{13}$$

Теорема 4. Нехай функція $f(z)$ аналітична у крузі $|z| < R$, $R \leq \infty$. Тоді коефіцієнти a_n^μ задовольняють нерівність

$$|a_n^\mu| \leq \frac{M(r, f) e^{\frac{r^2}{4}}}{r^n}, \quad 0 < r < R, \tag{14}$$

де $M(r, f) = \max_{|z| \leq r} |f(z)|$, і для кожного $0 < r < R$ ряд (11) збігається до $f(z)$ рівномірно у крузі $|z| \leq r$.

Доведення. Враховуючи нерівності

$$\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leq \frac{M(r, f)}{r^n},$$

отримуємо оцінки для коефіцієнтів a_{2m}^μ :

$$\begin{aligned}
|a_{2m}^\mu| &\leq \frac{1}{(m+\mu)!} \sum_{k=0}^m \frac{(m-k+\mu)!}{2^{2k}k!} \frac{|f^{(2m-2k)}(0)|}{(2m-2k)!} \\
&\leq M(r, f) \sum_{k=0}^m \frac{1}{2^{2k}k!} \frac{1}{r^{2(m-k)}} \leq \frac{M(r, f)}{r^{2m}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{r}{2}\right)^{2k}}{k!} = \frac{M(r, f) e^{\frac{r^2}{4}}}{r^{2m}}.
\end{aligned}$$

Аналогічно знаходимо

$$|a_{2m+1}^\mu| \leq \frac{M(r, f) e^{\frac{r^2}{4}}}{r^{2m+1}}.$$

Об'єднуючи оцінки для коефіцієнтів a_{2m}^μ , a_{2m+1}^μ , одержуємо нерівність (14).

Далі, нехай $|z| \leq r < R$ і $r < \rho < R$. Завдяки (14) і (3) маємо

$$\begin{aligned}
|f(z)| &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n^\mu| |b_n^\mu(z)| \leq M(\rho, f) e^{\frac{\rho^2}{4} + |z|} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n \\
&\leq M(\rho, f) e^{\frac{\rho^2}{4} + r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n = \frac{M(\rho, f) \rho}{\rho - r} e^{\frac{\rho^2}{4} + r},
\end{aligned}$$

що доводить рівномірну збіжність ряду (11) у крузі $|z| \leq r < R$.

Приклад 1. Розвинемо функцію $f(z) = \cos z$ у ряд за системою $\{b_n^\mu(z)\}_{n=0}^\infty$. Оскільки $f^{(2j)}(0) = (-1)^j$, $f^{(2j+1)}(0) = 0$, то згідно з формулами (13) маємо

$$a_{2m}^\mu = \frac{\mu!}{2^{2m}m!(m+\mu)!} \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j 2^{2j} C_m^j C_{j+\mu}^\mu}{C_{2j}^j}.$$

Використовуючи тотожність

$$\frac{\mu!}{2^{2m}m!(m+\mu)!} \sum_{j=0}^m \frac{(-1)^j 2^{2j} C_m^j C_{j+\mu}^\mu}{C_{2j}^j} = \frac{(-1)^{\mu+1} C_{2m-1}^{m+\mu}}{2^{2m-1}(2m)! C_{2m-1}^{2(\mu+1)}},$$

одержуємо

$$\cos z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu+1} C_{2m-1}^{m+\mu}}{2^{2m-1}(2m)! C_{2m-1}^{2(\mu+1)}} b_{2m}^\mu(z).$$

Аналогічно можна показати, що

$$\sin z = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu+1} C_{2m}^{m+\mu+1}}{2^{2m}(2m+1)! C_{2m}^{2(\mu+1)}} b_{2m+1}^\mu(z).$$

4. Побудова розв'язків крайових задач для рівняння Гельмгольца у циліндричних координатах. Розглянемо диференціальне рівняння з частинними похідними

$$\frac{\partial^2 U^0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U^0}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U^0}{\partial \rho} + U^0 = 0, \quad (15)$$

де $x \in R$, $\rho > 0$. Його розв'язок можна записати у вигляді [12]

$$U^0(x, \rho) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} u_{2n}^0(x, \rho), \quad (16)$$

де

$$u_n^0(x, \rho) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k n!}{2^{2k} (k!)^2 (n-2k)!} x^{n-2k} b_{2k}^0(\rho), \quad (17)$$

а функції $b_{2k}^0(\rho)$ визначені співвідношенням (2).

Для $x = 0$ і $\rho = 0$ функціям $u_n^0(x, y)$ відповідають вирази

$$u_{2n}^0(0, \rho) = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} b_{2n}^0(\rho), \quad u_{2n+1}^0(0, \rho) = 0,$$

$$u_{2n}^0(x, 0) = x^{2n}, \quad u_{2n+1}^0(x, 0) = x^{2n+1}.$$

Задача 1. Знайти розв'язок рівняння (15) у півпросторі $x > 0$, який задовольняє у площині $x = 0$ умову

$$U^0(x, \rho)|_{x=0} = f_1(\rho), \quad (18)$$

де функцію $f_1(\rho)$ задано збіжним рядом $f_1(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} b_{2n}^0(\rho)$.

Підставляючи розв'язок (16) в умову (18), отримуємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} u_{2n}^0(0, \rho) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} b_{2n}^0(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} b_{2n}^0(\rho).$$

Звідси $a_{2n} = \frac{(-1)^n 2^{2n} (n!)^2 A_{2n}}{(2n)!}$. Тому

$$U^0(x, \rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} (n!)^2 A_{2n}}{(2n)!} u_{2n}^0(x, \rho). \quad (19)$$

Приклад 2. Нехай $f_1(\rho) = 1$. Використовуючи (4), одержуємо

$$1 = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2r} (r!)^2} b_{2r}^0(\rho), \quad (20)$$

звідки $A_{2r} = \frac{1}{2^{2r} (r!)^2}$, $A_{2r+1} = 0$. Тоді, враховуючи співвідношення (19), (17), (20) і змінюючи порядок підсумовування, знаходимо

$$\begin{aligned} U^0(x, \rho) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2^{2k} (k!)^2 (2n-2k)!} x^{2(n-k)} b_{2k}^0(\rho) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} (k!)^2} b_{2k}^0(\rho) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-2k)!} x^{2(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} (k!)^2} b_{2k}^0(\rho) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+k}}{(2j)!} x^{2j} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k} (k!)^2} b_{2k}^0(\rho) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j)!} x^{2j} = \cos x. \end{aligned}$$

Отже, виконано умову $U^0(x, \rho)|_{x=0} = 1$.

Розглянемо диференціальне рівняння з частинними похідними

$$\frac{\partial^2 U^1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U^1}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U^1}{\partial \rho} + \left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) U^1 = 0, \quad (21)$$

де $x \in R$, $\rho > 0$. Його розв'язок можна записати у вигляді [12]

$$U^1(x, \rho) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n u_n^1(x, \rho), \quad (22)$$

де

$$u_n^1(x, \rho) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(-1)^k n!}{2^{2k} k! (k+1)! (n-2k-1)!} x^{n-2k-1} b_{2k+1}^0(\rho), \quad (23)$$

а функції $b_{2k+1}^0(\rho)$ визначено співвідношенням (2).

Для $x = 0$ і $\rho = 0$ функціям $u_n^1(x, y)$ відповідають вирази

$$u_{2n}^1(0, \rho) = 0, \quad u_{2n+1}^1(0, \rho) = \frac{(-1)^n (2n+1)!}{2^{2n} n! (n+1)!} b_{2n+1}^0(\rho),$$

$$u_{2n}^1(x, 0) = u_{2n+1}^1(x, 0) = 0.$$

Задача 2. Знайти розв'язок рівняння (21) у півпросторі $x > 0$ такий, що у площині $x = 0$ має вигляд

$$U^1(x, \rho)|_{x=0} = f_2(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} D_{2n+1} b_{2n+1}^0(\rho). \quad (24)$$

Підставляючи розв'язок (22) в умову (24), отримуємо

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_{2n+1} u_{2n+1}^1(0, \rho) = \sum_{n=0}^{\infty} D_{2n+1} b_{2n+1}^0(\rho),$$

або

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)!}{2^{2n} n! (n+1)!} d_{2n+1} b_{2n+1}^0(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} D_{2n+1} b_{2n+1}^0(\rho).$$

Звідси $d_{2n+1} = \frac{(-1)^n 2^{2n} n! (n+1)!}{(2n+1)!} D_{2n+1}$. Тому

$$U^1(x, \rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} n! (n+1)!}{(2n+1)!} D_{2n+1} u_{2n+1}^1(\rho). \quad (25)$$

Приклад 3. Нехай $f_2(\rho) = \rho$. Використовуючи (4), знаходимо

$$\rho = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2r} r! (r+1)!} b_{2r+1}^0(\rho), \quad (26)$$

звідки $D_{2r} = 0$, $D_{2r+1} = \frac{1}{2^{2r} r! (r+1)!}$. Тоді на підставі співвідношення (25) з урахуванням (23), (26) маємо

$$\begin{aligned} U^1(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2(n-k)}}{2^{2k} k! (k+1)! (2n-2k)!} b_{2k+1}^0(\rho) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! (k+1)!} b_{2k+1}^0(\rho) \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2(n-k)}}{(2n-2k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k! (k+1)!} b_{2k+1}^0(\rho) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j+k}}{(2j)!} x^{2j} = \rho \cos x. \end{aligned}$$

Отже, виконано умову $U^1(x, \rho)|_{x=0} = \rho$.

5. Висновки. Системи функцій $\{P_n(z) = z^{-1}\omega_n^\mu(z^{-1})\}_{n=0}^\infty$, $\{\psi_m(z) = z^{-1}b_m^\mu(z^{-1})\}_{m=0}^\infty$ — біортогональні на замкнутому контурі, що охоплює нульову точку, при цьому поліноми $\{P_n(z)\}_{n=0}^\infty$ — базис простору A_r .

Систему функцій $b_n^\mu(z)$ використовують при побудові розв'язків крайових задач для рівняння Гельмгольца у циліндричній системі координат. Розв'язки рівняння Гельмгольца на площинах $x = \text{const}$ виражаються через функції $b_n^\mu(z)$, що внаслідок існування відповідної біортогональної системи функцій дозволяє задовольнити задані граничні умови на цих площинах. На поверхнях $\rho = \text{const}$ функції $b_n^\mu(z)$ можна виразити через степені змінної x і відповідні граничні функції розвиваються у степеневі ряди.

Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів. Усі необхідні дані містяться в статті. Всі автори зробили рівномірний внесок у цю роботу. Автори заявляють про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Література

1. E. D. Fackerell, R. A. Littler, *Polynomials biorthogonal to Appell's polynomials*, Bull. Aust. Math. Soc., **11**, № 2, 181 – 195 (1974).
2. J. W. Schleusner, *A note on biorthogonal polynomials in two variables*, SIAM J. Math. Anal., **5**, 11 – 18 (1974).
3. A. Zhedanov, *The classical Laurent biorthogonal polynomials*, J. Comput. Appl. Math., **98**, № 1, 121 – 147 (1998).
4. R. Cruz-Barroso, L. Daruis, P. Gonzalez-Vera, O. Njastad, *Sequences of orthogonal Laurent polynomials, bi-orthogonality and quadrature formulas on the unit circle*, J. Comput. Appl. Math., **206**, № 2, 950 – 966 (2007).
5. М. А. Сухорольський, *Розвинення функцій за системою поліномів, біортогональних на замкнутому контурі з системою регулярних у нескінченно віддаленій точці функцій*, Укр. мат. журн., **62**, № 2, 238 – 254 (2010); **English translation:** Ukr. Math. J., **62**, № 2, 268 – 288 (2010); <https://doi.org/10.1007/s11253-010-0350-6>.
6. М. А. Сухорольський, В. В. Достойна, *Один клас біортогональних систем функцій, які виникають при розв'язанні рівняння Гельмгольца у циліндричній системі координат*, Мат. методи та фіз.-мех. поля, **55**, № 2, 52 – 62 (2012); **English translation:** J. Math. Sci., **192**, № 5, 541 – 554 (2013); <https://doi.org/10.1007/s10958-013-1415-5>.
7. О. В. Веселовська, В. В. Достойна, *Система функцій, біортогональних з похідними поліномів Чебишева другого роду комплексної змінної*, Укр. мат. вісн., **17**, № 2, 256 – 277 (2020); **English translation:** J. Math. Sci. (N.Y.), **249**, № 5, 786 – 803 (2020); <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04973-0>.
8. О. В. Veselovska, V. V. Dostoina, M. I. Klapchuk, *Properties of the second-kind Chebyshev polynomials of complex variable*, Res. Math., **28**, № 2, 35 – 50 (2020); <https://doi.org/10.15421/242009>.
9. М. А. Сухорольський, О. В. Веселовська, В. В. Достойна, *Системи поліномів комплексної змінної, споріднені з класичними системами ортогональних поліномів*, Укр. мат. журн., **73**, № 11, 1516 – 1531 (2021); **English translation:** Ukr. Math. J., **73**, № 11, 1752 – 1771 (2022); <https://doi.org/10.1007/s11253-022-02028-y>.
10. А. И. Маркушевич, *Избранные главы теории аналитических функций*, Наука, Москва (1976).
11. М. А. Сухорольський, *Системи розв'язків рівняння Гельмгольца*, Вісн. Нац. ун-ту “Львівська політехніка”, Сер. фіз.-мат. науки, № 718, 19 – 34 (2011).
12. О. В. Веселовська, В. В. Достойна, Х. Т. Дрогомирецька, *Побудова розв'язків рівняння Гельмгольца в циліндричній системі координат у вигляді однорідних поліномів за двома біортогональними системами функцій*, Мат. методи та фіз.-мех. поля, **64**, № 4, 47 – 54 (2021).
13. H. Bateman, A. Erdélyi, *Higher transcendental functions. Vol. 2: Bessel functions, parabolic cylinder functions, and orthogonal polynomials*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, Toronto, London (1953).

Одержано 31.08.23,
після доопрацювання — 28.01.24