DOI: 10.3842/nosc.v27i1.1459

УДК 517.9

МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦІЇ АДОМЯНА В ТЕОРІЇ ЗАДАЧ, ОБЕРНЕНИХ ДО НЕЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Олександр Бойчук

Інститут математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна
e-mail: boichuk.aa@gmail.com

Сергій Чуйко

Донбаський державний педагогічний університет
вул. Генерала Батюка, 19, Слов'янськ, 84112, Донецька обл., Україна

Інститут динаміки складних технічних систем імені Макса Планка
Магдебург, Німеччина
e-mail: chujko-slav@ukr.net, chuiko@mpi-magdeburg.mpg.de, відповідальний за листування

Віктор Чуйко

Київський національний університет імені Тараса Шевченка
вул. Володимирська, 64, Київ, 01033, Україна
e-mail: chujko-slav@ukr.net

We investigate a weakly nonlinear boundary-value problem for a system of differential equations with delay. The initial function of the differential system with delay contains an unknown eigenfunction that provides the solvability of the weakly nonlinear boundary-value problem. By employing the Adomian decomposition method, we derive conditions for solvability and develop a new iterative scheme to find solutions of the weakly nonlinear boundary-value problem for a system of differential equations with delay as well as its eigenfunction.

Досліджено слабконелінійну крайову задачу для системи диференціальних рівнянь із запізненням. Початкова функція диференціальної системи із запізненням містить невідому власну функцію, яка забезпечує розв'язність слабконелінійної крайової задачі. Використовуючи метод декомпозиції Адомяна, отримано умови розв'язності та побудовано нову ітераційну техніку для знаходження розв'язків слабконелінійної крайової задачі для системи диференціальних рівнянь із запізненням, а також її власної функції.

Постановка задачі. Досліджуємо задачу про побудову розв'язку [1, 2]

$$z(\cdot,\varepsilon)\in\mathbb{C}^1\big\{[\Delta,T]\setminus\{k\Delta\}_I\big\},\qquad T:=(q+1)\,\Delta,\quad k=1,2,\ldots,q+1,\quad z(t,\cdot)\in\mathbb{C}[0,\varepsilon_0],$$

нелінійної періодичної крайової задачі з зосередженим запізненням

$$\begin{aligned} &z'(t,\varepsilon)=A(t)\,z(t,\varepsilon)+B(t)\,z(t-\Delta,\varepsilon)+f(t)+\varepsilon\,Z(z(t,\varepsilon),z(t-\Delta,\varepsilon),t,\varepsilon),\\ &\ell z(\cdot,\varepsilon)=\alpha, \end{aligned}\tag{1}$$

неперервного в точках $t=k\Delta,$ з початковою функцією

$$z(t,\varepsilon) = \varphi(h(\varepsilon),\varepsilon),$$

залежною від власного вектора $h(\varepsilon)$ крайової задачі (1). Розв'язок крайової задачі (1) з зосередженим запізненням шукаємо у малому околі розв'язку [1, 3]

$$z_0(t) \in \mathbb{C}^1\big\{[\Delta, T] \setminus \{k\Delta\}_I\big\}, \quad k = 1, 2, \ldots, q+1,$$

породжуючої нетерової $(m \neq n)$ крайової задачі

$$z_0'(t) = A(t)z_0(t) + B(t)z_0(t-\Delta) + f(t), \quad t \in [\Delta, T] \setminus \{k\Delta\}_I, \quad t \neq k\Delta, \quad \ell z_0(\cdot) = \alpha, \quad (2)$$

неперервного в точках $t = k\Delta,$ з початковою функцією

$$z_0(t) = \varphi(h_0, 0), \quad h_0 := h(0), \quad t \in [0, \Delta],$$

залежного від власного вектора $h_0 \in \mathbb{R}^n$ породжуючої крайової задачі (2). У точках $t = k\Delta,$ $k = 1, 2, \ldots, q,$ розв'язок крайової задачі (1) з зосередженим запізненням, можливо, зазнає обмеженого розриву похідної [1, 3]. Тут

$$A(t), B(t) \in \mathbb{C}[\Delta, T], \quad f(t) \in \mathbb{C}[\Delta, T], \quad \alpha \in \mathbb{R}^m.$$

Нелінійна вектор-функція $Z(z(t,\varepsilon), z(t-\Delta,\varepsilon), t, \varepsilon)$ аналітична за невідомими $z(t,\varepsilon)$ і $z(t-\Delta,\varepsilon)$ у малому околі розв'язку породжуючої крайової задачі (2) і функції $z_0(t-\Delta).$ Крім того, вектор-функція

$$Z\big(z(t,\varepsilon), z(t-\Delta,\varepsilon), t, \varepsilon\big)$$

неперервна за малим параметром ε на відрізку $[0, \varepsilon_0],$ а також неперервна за незалежною змінною t на відрізку $[\Delta, T].$ Функцію $\varphi(h(\varepsilon),\varepsilon)$ припускаємо лінійною за власним вектором $h(\varepsilon)$ крайової задачі (1) та аналітичною за малим параметром ε на відрізку $[0, \varepsilon_0]$ і в малому околі власного вектора $h_0 \in \mathbb{R}^n$ породжуючої крайової задачі (2). До того ж, $\ell z(\cdot)$ — лінійний обмежений векторний функціонал.

Актуальність вивчення крайової задачі (1) пов'язано з широким застосуванням подібних задач при вивченні неізотермічних хімічних реакцій. Приклади моделювання таких реакцій наведено у статтях [4, 5]. У [6, 7] знайдено наближення до розв'язків нелінійних крайових задач, зокрема, періодичних крайових задач. При побудові розв'язків нелінійних крайових задач виникає проблема неможливості знаходження розв'язків у елементарних функціях, яка, зі свого боку, призводить до великих похибок розв'язків нелінійних крайових задач. Подібну проблему продемонстровано для періодичної задачі для рівняння, яке визначає рух супутника на еліптичній орбіті, у [8].

Крім того, побудову розв'язків нелінійних крайових задач із використанням методу простих ітерацій [1] значно ускладнюють обчислення похідних нелінійностей. У статтях [6, 7] прискорення збіжності ітераційних схем досягнуто обчисленням похідних нелінійностей на кожному кроці. Враховуючи зазначене, спрощення обчислень похідних нелінійностей і можливість знаходження розв'язків нелінійних крайових задач, зокрема, періодичних крайових задач, у елементарних функціях можна досягнути з використанням методу декомпозиції Адомяна [9, 10]. Приклад такого спрощення буде наведено далі.

2. Умова розв'язності породжуючої задачі. Функцію $\varphi(h_0, 0)$, лінійну щодо вектора h_0, можна подати у вигляді

$$\varphi_0(h_0) := \varphi(h_0, 0) = \beta + \Phi_0\, h_0, \quad \Phi_0 \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \beta \in \mathbb{R}^n.$$

У статті [3] доведено існування єдиного розв'язку

$$z_0(t) = K\big[f(s); \varphi(h_0)\big](t) \in \mathbb{C}^1\big\{[\Delta, T] \setminus \{k\Delta\}_I\big\}, \quad k = 1, 2, \ldots, q+1,$$

породжуючої системи (2) для довільної неоднорідності $f(t)$, матриці Φ та вектора β, а також умови розв'язності лінійної нетерової крайової задачі для породжуючої системи (2). Тут $K[f(s); \varphi_0(h_0)](t)$ — оператор Гріна задачі Коші для породжуючої системи (2) з початковою функцією $\varphi(h_0)$. Позначимо матрицю

$$Q := \ell K\big[0; \Phi_0\big](\cdot) \in \mathbb{R}^{m\times n}$$

та її матрицю-ортопроєктор

$$P_{Q^*} : \, \mathbb{R}^n \to \mathbb{N}(Q^*).$$

У некритичному випадку

$$P_{Q^*} = 0$$

— породжуюча крайова задача (2), розв'язна для довільної неоднорідності $f(t)$, матриці Ψ та векторів α, β. Функцію $\varphi(h_0)$ принаймні однозначно визначає власний вектор

$$h_0^* = Q^+\big\{\alpha - \ell K\big[f(s); \beta\big](\cdot)\big\},$$

при цьому породжуюча задача (2) має бодай один розв'язок

$$z_0(t, h_0^*) = G\big[f(s); \varphi_0(h_0^*)\big](t), \quad t \in [\Delta, T].$$

Тут Q^+ — псевдообернена за Муром – Пенроузом матриця [1],

$$G[f(s); \varphi(h_0^*)](t) := K\big[f(s); \varphi_0(h_0^*)\big](t)$$

— узагальнений оператор Гріна породжуючої крайової задачі (2) у некритичному випадку.

Лема. *У некритичному випадку $P_{Q^*} = 0$ — породжуюча крайова задача (2), розв'язна для довільної неоднорідності $f(t)$, матриці Ψ та векторів α, β. Початкову функцію $\varphi(h_0)$ принаймні однозначно визначає власний вектор*

$$h_0^* = Q^+\big\{\alpha - \ell K\big[f(s); \beta\big](\cdot)\big\},$$

при цьому породжуюча задача (2) має бодай один розв'язок

$$z_0(t, h_0^*) = G\big[f(s); \varphi_0(h_0^*)\big](t), \quad t \in [\Delta, T].$$

3. Ітераційна схема. Розв'язок нелінійної крайової задачі (1) шукаємо у вигляді

$$z(t,\varepsilon) := z_0(t,h_0^*) + u_1(t,\varepsilon) + \ldots + u_k(t,\varepsilon) + \ldots,$$

$$h(\varepsilon) = h_0^* + \xi_1(\varepsilon) + \xi_2(\varepsilon) + \ldots + \xi_k(\varepsilon) + \ldots .$$

Нелінійна вектор-функція $Z(z(t,\varepsilon), z(t-\Delta,\varepsilon), t, \varepsilon)$ аналітична за невідомими $z(t,\varepsilon)$ і $z(t-\Delta,\varepsilon)$ у малому околі розв'язку породжуючої крайової задачі (2) та функції $z_0(t-\Delta)$, тому у зазначеному околі має місце розклад [9, с. 502]

$$\begin{aligned} Z\big(z(t,\varepsilon), z(t-\Delta,\varepsilon), t, \varepsilon\big) &= Z_0\big(z_0(t,h_0^*), z_0(t-\Delta,h_0^*), t\big) \\ &\quad + Z_1\big(z_0(t,h_0^*), u_1(t,\varepsilon), z_0(t-\Delta,h_0^*), u_1(t-\Delta,\varepsilon), t, \varepsilon\big) + \ldots \\ &\quad + Z_k\big(z_0(t,h_0^*), u_1(t,\varepsilon), \ldots, u_k(t,\varepsilon), z_0(t-\Delta,h_0^*), \\ &\qquad\qquad u_1(t-\Delta,\varepsilon), \ldots, u_k(t-\Delta,\varepsilon), t, \varepsilon\big) + \ldots . \end{aligned}$$

Функція $\varphi(h(\varepsilon))$ аналітична за власним вектором $h(\varepsilon)$ крайової задачі (1) у малому околі власного вектора $h_0^* \in \mathbb{R}^n$ породжуючої крайової задачі (2), тому у зазначеному околі має місце розклад [9, 10]

$$\begin{aligned} \varphi(h(\varepsilon),\varepsilon) &= \varphi_0(h_0^*) + \varphi_1(h_0^*, \xi_1(\varepsilon), \varepsilon) \\ &\quad + \varphi_2\big(h_0^*, \xi_1(\varepsilon), \xi_2(\varepsilon), \varepsilon\big) + \ldots + \varphi_k\big(h_0^*, \xi_1(\varepsilon), \ldots, \xi_k(\varepsilon), \varepsilon\big) + \ldots . \end{aligned}$$

Перше наближення до розв'язку нелінійної крайової задачі (1) у критичному випадку

$$z_1(t,\varepsilon) := z_0(t,h_0^*) + u_1(t,\varepsilon),$$

$$u_1(t,\varepsilon) = \varepsilon\, G\Big[Z_0(z_0(s,h_0^*), z_0(s-\Delta,h_0^*), s); \varphi_0(h_0^*)\Big](t)$$

визначає розв'язок нелінійної крайової задачі першого наближення

$$\frac{du_1(t,\varepsilon)}{dt} = A(t)\, u_1(t,\varepsilon) + B(t)\, \varphi_0(h_0^*) + \varepsilon\, Z_0(z_0(t,h_0^*), z_0(t-\Delta,h_0^*), t), \quad \ell u_1(\cdot,\varepsilon) = 0$$

з початковою функцією $\varphi_0(h_0^*)$. Друге наближення до розв'язку нелінійної крайової задачі (1) у некритичному випадку

$$z_2(t,\varepsilon) := z_0(t,h_0^*) + u_1(t,\varepsilon) + u_2(t,\varepsilon),$$

$$u_2(t,\varepsilon) = \varepsilon\, G\Big[Z_1(z_0(s,h_0^*), u_1(s,\varepsilon), z_0(s-\Delta,h_0^*), u_1(s-\Delta,\varepsilon), s); \varphi_1(h_0^*, \xi_1(\varepsilon), \varepsilon)\Big](t)$$

визначає розв'язок нелінійної крайової задачі другого наближення

$$\begin{aligned} \frac{du_2(t,\varepsilon)}{dt} &= A\, u_2(t,\varepsilon) + B(t)\, \varphi_1(h_0^*, \xi_1(\varepsilon), \varepsilon) \\ &\quad + \varepsilon\, Z_1(z_0(t,h_0^*), u_1(t,\varepsilon), z_0(t-\Delta,h_0^*), u_1(t-\Delta,\varepsilon), t, \varepsilon), \quad \ell u_2(\cdot,\varepsilon) = 0 \end{aligned}$$

з початковою функцією $\varphi_1(h_0^*, \xi_1(\varepsilon), \varepsilon)$. Функцію $\varphi(h(\varepsilon),\varepsilon)$, лінійну щодо вектора $h(\varepsilon)$, можна подати у вигляді

$$\varphi(h(\varepsilon),\varepsilon) = \beta + \Phi(\varepsilon)\, h(\varepsilon), \quad \Phi(\varepsilon) \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Функція $\varphi(h(\varepsilon),\varepsilon)$ за припущенням аналітична за малим параметром ε на відрізку $[0,\varepsilon_0]$, тому матрицю $\Phi(\varepsilon)$ наведемо у вигляді

$$\Phi(\varepsilon) = \Phi_0 + \varepsilon\,\Phi_1 + \varepsilon^2\,\Phi_1 + \ldots .$$

У некритичному випадку крайова задача другого наближення розв'язна для довільної нелінійності

$$Z_1\big(z_0(t,h_0^*),u_1(t,\varepsilon),z_0(t-\Delta,h_0^*),u_1(t-\Delta,\varepsilon),t,\varepsilon\big);$$

таким чином, принаймні однозначно знаходимо вектор

$$\xi_1(\varepsilon) = -\varepsilon\,Q^+\ell K\Big[Z_1(z_0(s,h_0^*),u_1(s,\varepsilon),z_0(s-\Delta,h_0^*),u_1(s-\Delta,\varepsilon),s,\varepsilon);0\Big](\cdot),$$

при цьому крайова задача другого наближення має бодай один розв'язок

$$\begin{aligned}
u_2(t,\varepsilon) &= G\Big[\varepsilon\,Z_1(z_0(s,h_0^*),u_1(s,\varepsilon),z_0(s-\Delta,h_0^*),u_1(s-\Delta,\varepsilon),s,\varepsilon);\varphi_1(h_0^*,\xi_1(\varepsilon),\varepsilon)\Big](t)\\
&:= \varepsilon\,K\Big[Z_1(z_0(s,h_0^*),u_1(s,\varepsilon),z_0(s-\Delta,h_0^*),u_1(s-\Delta,\varepsilon),s,\varepsilon),\\
&\qquad \Phi_0\,Q^+\ell K\Big[Z_1(z_0(s,h_0^*),u_1(s,\varepsilon),z_0(s-\Delta,h_0^*),u_1(s-\Delta,\varepsilon),s,\varepsilon);0\Big](\cdot)\Big](t).
\end{aligned}$$

Послідовність наближень до розв'язку нелінійної періодичної крайової задачі (1) у некритичному випадку визначає ітераційна схема

$$\begin{aligned}
z_1(t,\varepsilon) &:= z_0(t,h_0^*) + u_1(t,\varepsilon),\\
u_1(t,\varepsilon) &= \varepsilon\,G\big[Z_0(z_0(s,h_0^*),z_0(s-\Delta,h_0^*),s);\varphi_0(h_0^*)\big](t);\\
z_2(t,\varepsilon) &:= z_0(t,h_0^*) + u_1(t,\varepsilon) + u_2(t,\varepsilon),\\
u_2(t,\varepsilon) &= \varepsilon\,K\Big[Z_1(z_0(s,h_0^*),u_1(s,\varepsilon),z_0(s-\Delta,h_0^*),u_1(s-\Delta,\varepsilon),s,\varepsilon);\\
&\qquad \Phi_0\,Q^+\ell K\big[Z_1(z_0(s,h_0^*),u_1(s,\varepsilon),z_0(s-\Delta,h_0^*),u_1(s-\Delta,\varepsilon),s,\varepsilon);0\big](\cdot)\Big](t),\ldots;\\
z_{k+1}(t,\varepsilon) &:= z_0(t,h_0^*) + u_1(t,\varepsilon) + \ldots + u_{k+1}(t,\varepsilon), \quad k=0,1,2,\ldots,\\
u_{k+1}(t,\varepsilon) &= \varepsilon\,K\Big[Z_k(z_0(s,h_0^*),\ldots,u_k(s,\varepsilon),\\
&\qquad z_0(s-\Delta,h_0^*),\ldots,u_k(s-\Delta,\varepsilon),s,\varepsilon);\\
&\qquad \Phi_0\,Q^+\ell K\big[Z_k(z_0(s,h_0^*),\ldots,u_k(s,\varepsilon),\\
&\qquad z_0(s-\Delta,h_0^*),\ldots,u_k(s-\Delta,\varepsilon),s,\varepsilon);0\big](\cdot)\Big](t),\ldots .
\end{aligned} \tag{3}$$

Теорема. *У некритичному випадку $P_{Q^*}=0$ — породжуюча крайова задача (2), розв'язна для довільної неоднорідності $f(t)$, матриці Ψ та векторів α, β. Початкову функцію $\varphi(h_0)$ принаймні однозначно визначає власний вектор*

$$h_0^* = Q^+\big\{\alpha - \ell K\big[f(s);\beta\big](\cdot)\big\},$$

при цьому породжуюча задача (2) має хоча б один розв'язок

$$z_0(t, h_0^*) = G\big[f(s); \varphi(h_0^*)\big](t), \quad t \in [\Delta, T].$$

У некритичному випадку у малому околі породжуючого розв'язку $z_0(t)$ і в малому околі власного вектора $h_0^* \in \mathbb{R}^n$ породжуючої крайової задачі (2) задача (1) має бодай один розв'язок. Послідовність наближень до розв'язку нелінійної крайової задачі (1) з зосередженим запізненням визначає ітераційна схема (3). Якщо існують константи $0 < \gamma < 1$ і $0 < \delta < 1$, для яких мають місце нерівності

$$\|u_1(t,\varepsilon)\| \le \gamma\, \|z_0(t,h_0^*)\|, \qquad \|u_{k+1}(t,\varepsilon)\| \le \gamma\, \|u_k(t,\varepsilon)\|, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$
$$\|\xi_1(\varepsilon)\| \le \delta\, |h_0^*|, \qquad \|\xi_{k+1}(\varepsilon)\| \le \delta\, \|\xi_k(\varepsilon)\|, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

то ітераційна схема (3) збігається до розв'язку нелінійної крайової задачі (1) з зосередженим запізненням.

Отримана умова збіжності ітераційної схеми (3) відрізняється від аналогічних оцінок з [11, 12] і дозволяє оцінити проміжок значень малого параметра $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0],\ 0 \le \varepsilon_* \le \varepsilon_0$, для яких зберігається збіжність ітераційної схеми (3).

У разі фредгольмової $(m = n)$ крайової задачі (2) матриця Q стає квадратною, при цьому умова некритичності $P_{Q^*} = 0$ перетворюється на умову невиродженості матриць Q. Таким чином, фредгольмова некритична крайова задача (2) має єдиний розв'язок.

Наслідок. *У некритичному випадку $\det Q \ne 0$ — породжуюча фредгольмова $(m = n)$ крайова задача (2), розв'язна для довільної неоднорідності $f(t)$, матриці Ψ та векторів α, β. Початкову функцію $\varphi(h_0)$ однозначно визначає власний вектор*

$$h_0^* = Q^{-1}\big\{\alpha - \ell K\big[f(s);\beta\big](\cdot)\big\},$$

при цьому породжуюча задача (2) має єдиний розв'язок

$$z_0(t, h_0^*) = G\Big[f(s); \varphi(h_0^*)\Big](t), \quad t \in [\Delta, T].$$

У некритичному випадку у малому околі породжуючого розв'язку $z_0(t)$ і в малому околі власного вектора $h_0^* \in \mathbb{R}^n$ породжуючої крайової задачі (2) задача (1) має єдиний розв'язок. Послідовність наближень до розв'язку нелінійної крайової задачі (1) з зосередженим запізненням визначає ітераційна схема (3). Якщо існують константи $0 < \gamma < 1$ і $0 < \delta < 1$, для яких мають місце нерівності (4), то ітераційна схема (3) збігається до розв'язку нелінійної крайової задачі (1) із зосередженим запізненням.

Приклад. Продемонструємо ефективність доведеного наслідку на прикладі задачі про знаходження розв'язків

$$z(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1\big\{[0,3] \setminus \{k\Delta\}_I\big\}, \qquad T := 3\,\Delta, \quad k = 1, 2, \qquad z(t,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$$

нелінійної крайової задачі

$$z'(t,\varepsilon) = z(t-1,\varepsilon) + \frac{t}{12} + \varepsilon\,\sin z(t,\varepsilon), \quad t \in [1,3], \quad t \ne 2, \quad z(3,\varepsilon) - z(0,\varepsilon) \tag{5}$$

з початковою функцією

$$z(t,\varepsilon) := \frac{1}{12}\, h(\varepsilon)\,(1 + \varepsilon\,\sin\varepsilon), \quad h(0) := h_0.$$

Розв'язок періодичної крайової задачі (5) із зосередженим запізненням шукаємо у малому околі розв'язку

$$z_0(t) \in \mathbb{C}^1\big\{[0,3] \setminus \{k\Delta\}_I\big\}, \quad k = 1, 2,$$

породжуючої задачі для рівняння

$$z_0'(t) = z_0(t-1) + \frac{t}{12}, \quad t \in [1,3], \quad t \neq 2,$$

з початковою функцією

$$z_0(t) = \varphi(h_0) := \frac{1}{12} + h_0, \quad t \in [0,1].$$

Періодичні розв'язки нелінійного рівняння (5)

$$z(t,\varepsilon) := \begin{cases} h(\varepsilon), & t \in [0,1], \\ x(t,\varepsilon), & t \in [1,2], \\ y(t,\varepsilon), & t \in [2,3] \end{cases}$$

будемо шукати в околі розв'язку

$$z_0(t,c_0) := \begin{cases} h_0, & t \in [0,1], \\ x_0(t), & t \in [1,2], \\ y_0(t), & t \in [2,3] \end{cases}$$

лінійної частини цього рівняння. Для періодичної задачі для нелінійного рівняння (5) має місце некритичний випадок

$$Q = \frac{5}{2} \neq 0,$$

при цьому породжуюча задача для нелінійного рівняння (5) має єдиний:

$$P_{Q^*} = P_Q = 0$$

розв'язок

$$z_0(t,h_0^*) = G\big[f(s);\varphi(h_0^*)\big](t), \quad t \in [0,1].$$

Тут

$$h_0^* = -\frac{43}{180};$$

крім того,

$$G\big[f(s);\varphi(s,h_0)\big](t) = \begin{cases} \dfrac{1}{360}\,(15\,t^2 - 56\,t - 15), & t \in [1,2], \\ \dfrac{1}{360}\,(5\,t^3 - 28\,t^2 + 56\,t - 107\,t - 15), & t \in [2,3]. \end{cases}$$

Використовуючи ітераційну схему (3), отримуємо

$$z_1(t,\varepsilon) := z_0(t,h_0^*) + u_1(t,\varepsilon), \qquad \xi_1(\varepsilon) = \frac{9\,142\,739\,693\,269\,428\,991\varepsilon}{52\,295\,018\,840\,064\,000\,000},$$
$$u_1(t,\varepsilon) = \varepsilon\, G\big[Z_0(z_0(s,h_0^*), z_0(s-\Delta,h_0^*),s);\varphi_0(h_0^*)\big](t).$$

Тут

$$Z_0\big(z_0(t,h_0^*), z_0(t-\Delta,h_0^*),t,0\big) = \frac{t+1}{12} + h_0^*, \quad t\in[1,2];$$

крім того,

$$Z_0\big(z_0(t,h_0^*), z_0(t-\Delta,h_0^*),t,0\big) = -\frac{1}{24}\,(2+24\,h_0^*(1-t)-2\,t-t^2), \quad t\in[2,3].$$

Таким чином, отримуємо

$$\begin{aligned} u_1(t,\varepsilon) = {} & \frac{36\,166\,472\,\varepsilon}{343\,449\,189} + \frac{58\,468\,570\,\varepsilon\, t}{439\,034\,251} - \frac{20\,242\,793\,\varepsilon\, t^2}{260\,490\,569} + \frac{6\,202\,741\,\varepsilon\, t^3}{441\,638\,924} \\ & + \frac{526\,161\,\varepsilon\, t^4}{5\,898\,414\,008} - \frac{1\,018\,972\,\varepsilon\, t^5}{10\,874\,007\,387} + \frac{2\,514\,933\,\varepsilon\, t^6}{111\,573\,323\,632} - \frac{55\,925\,\varepsilon\, t^7}{34\,139\,468\,751} \\ & - \frac{9401\,\varepsilon\, t^8}{161\,243\,136\,000} + \frac{6047\,\varepsilon\, t^9}{386\,983\,526\,400} - \frac{7\,\varepsilon\, t^{10}}{3\,583\,180\,800} + \frac{\varepsilon\, t^{11}}{10\,510\,663\,680}, \quad t\in[1,2]. \end{aligned}$$

Аналогічно одержуємо

$$\begin{aligned} u_1(t,\varepsilon) = {} & \frac{38\,147\,502\,\varepsilon}{85\,623\,445} - \frac{39\,991\,012\,\varepsilon\, t}{96\,998\,419} + \frac{40\,908\,857\,\varepsilon\, t^2}{170\,989\,992} - \frac{27\,665\,321\,\varepsilon\, t^3}{439\,535\,019} \\ & + \frac{9\,365\,617\,\varepsilon\, t^4}{1\,751\,824\,081} + \frac{1\,855\,650\,\varepsilon\, t^5}{2\,763\,562\,183} - \frac{736\,121\,\varepsilon\, t^6}{3\,778\,185\,404} + \frac{474\,517\,\varepsilon\, t^7}{11\,902\,902\,157} \\ & - \frac{142\,435\,\varepsilon\, t^8}{25\,270\,389\,627} + \frac{62\,553\,\varepsilon\, t^9}{225\,278\,094\,107} + \frac{20\,452\,\varepsilon\, t^{10}}{187\,615\,153\,639} \\ & - \frac{28\,023\,\varepsilon\, t^{11}}{781\,858\,340\,417} + \frac{2\,942\,\varepsilon\, t^{12}}{428\,557\,852\,157} - \frac{2\,881\,\varepsilon\, t^{13}}{2\,789\,430\,326\,459} \\ & + \frac{11\,\varepsilon\, t^{14}}{96\,745\,881\,600} - \frac{7\,\varepsilon\, t^{15}}{870\,712\,934\,400} + \frac{\varepsilon\, t^{16}}{3\,715\,041\,853\,440}, \quad t\in[2,3]. \end{aligned}$$

Далі, для скорочення зображення наближень, використовуючи раціоналізацію та розвинення нелінійності

$$\sin y \approx -\frac{y^3}{6} + \frac{y^5}{120} - \frac{y^7}{5040},$$

за допомогою ітераційної схеми (3) маємо

$$z_2(t,\varepsilon) := z_0(t,h_0^*) + u_1(t,\varepsilon) + u_2(t,\varepsilon), \qquad \xi_2(\varepsilon) \approx \frac{14\,305\,739\,\varepsilon^2}{213\,563\,792},$$

$$u_2(t,\varepsilon) = \varepsilon\, K\Big[Z_1(z_0(s,h_0^*),u_1(s,\varepsilon),z_0(s-\Delta,h_0^*),u_1(s-\Delta,\varepsilon),s,\varepsilon);$$

$$\Phi_0\, Q^+ \ell K\big[Z_1(z_0(s,h_0^*),u_1(s,\varepsilon),z_0(s-\Delta,h_0^*),u_1(s-\Delta,\varepsilon),s,\varepsilon);0\big](\cdot)\Big](t).$$

Таким чином, одержуємо

$$u_2(t,\varepsilon) \approx -\frac{43\,743\,519\,\varepsilon^2}{294\,518\,354} - \frac{18\,090\,901\,\varepsilon^2\,t}{271\,265\,350} + \frac{17\,307\,207\,\varepsilon^2\,t^2}{261\,482\,599} - \frac{10\,076\,181\,\varepsilon^2\,t^3}{379\,775\,021}$$
$$+ \frac{1\,931\,713\,\varepsilon^2\,t^4}{558\,212\,598} + \frac{1404\,251\,\varepsilon^2\,t^5}{4\,450\,700\,052} - \frac{1\,092\,233\,\varepsilon^2\,t^6}{7\,601\,769\,733} + \frac{438\,741\,\varepsilon^2\,t^7}{17\,159\,383\,693}$$
$$- \frac{82\,787\,\varepsilon^2\,t^8}{68\,718\,818\,682} - \frac{17\,640\,\varepsilon^2\,t^9}{69\,966\,504\,613} + \frac{18\,131\,\varepsilon^2\,t^{10}}{322\,875\,843\,956} - \frac{8\,693\,\varepsilon^2\,t^{11}}{1\,474\,322\,773\,235}$$
$$+ \frac{426\,\varepsilon^2\,t^{12}}{4\,335\,308\,293\,969} + \frac{211\,\varepsilon^2\,t^{13}}{4\,441\,878\,982\,069} - \frac{3\,\varepsilon^2\,t^{14}}{435\,622\,788\,386} + \frac{\varepsilon^2\,t^{15}}{2\,053\,176\,156\,435}$$
$$+ \frac{\varepsilon^2\,t^{16}}{901\,079\,914\,625\,509} - \frac{\varepsilon^2\,t^{17}}{292\,523\,438\,365\,951} + \frac{\varepsilon^2\,t^{18}}{2\,736\,551\,797\,179\,206}$$
$$- \frac{\varepsilon^2\,t^{19}}{44\,835\,247\,968\,373\,028} + \frac{\varepsilon^2\,t^{20}}{1\,673\,849\,257\,485\,926\,515}, \quad t \in [1,2].$$

Аналогічно отримуємо

$$u_2(t,\varepsilon) \approx -\frac{57\,939\,177\,\varepsilon^2}{145\,833\,452} + \frac{627\,427\,934\,\varepsilon^2\,t}{1\,426\,449\,505} - \frac{8\,705\,343\,\varepsilon^2\,t^2}{26\,229\,052} + \frac{13\,250\,809\,\varepsilon^2\,t^3}{111\,866\,838}$$
$$- \frac{15\,722\,485\,\varepsilon^2\,t^4}{1\,020\,011\,003} - \frac{2\,462\,114\,\varepsilon^2\,t^5}{788\,233\,527} + \frac{1\,152\,203\,\varepsilon^2\,t^6}{643\,247\,382} - \frac{1\,659\,555\,\varepsilon^2\,t^7}{3\,795\,442\,747}$$
$$+ \frac{382\,745\,\varepsilon^2\,t^8}{5\,474\,487\,171} - \frac{132\,427\,\varepsilon^2\,t^9}{42\,550\,366\,996} - \frac{255\,356\,\varepsilon^2\,t^{10}}{116\,574\,615\,463} + \frac{52\,156\,\varepsilon^2\,t^{11}}{62\,660\,316\,939}$$
$$- \frac{27\,589\,\varepsilon^2\,t^{12}}{155\,339\,339\,111} + \frac{12\,319\,\varepsilon^2\,t^{13}}{468\,874\,071\,645} - \frac{15\,803\,\varepsilon^2\,t^{14}}{7\,176\,250\,336\,633} - \frac{191\,\varepsilon^2\,t^{15}}{1\,299\,740\,095\,803}$$
$$+ \frac{383\,\varepsilon^2\,t^{16}}{4\,035\,457\,284\,201} - \frac{25\,\varepsilon^2\,t^{17}}{1\,271\,418\,451\,117} + \frac{8\,\varepsilon^2\,t^{18}}{3\,158\,551\,344\,641} - \frac{\varepsilon^2\,t^{19}}{6\,497\,163\,566\,518}$$
$$- \frac{\varepsilon^2\,t^{20}}{40129482107149} + \frac{\varepsilon^2\,t^{21}}{93\,658\,864\,188\,164} - \frac{\varepsilon^2\,t^{22}}{445\,974\,216\,513\,309}$$
$$+ \frac{\varepsilon^2\,t^{23}}{2\,871\,554\,175\,394\,265} - \frac{\varepsilon^2\,t^{24}}{23\,030\,218\,492\,753\,100} + \frac{\varepsilon^2\,t^{25}}{227\,542\,066\,341\,533\,372}$$
$$- \frac{\varepsilon^2\,t^{26}}{2\,858\,101\,088\,663\,946\,181} + \frac{\varepsilon^2\,t^{27}}{48\,849\,292\,147\,645\,537\,289}$$
$$- \frac{\varepsilon^2\,t^{28}}{1\,283\,624\,997\,471\,252\,806\,716} + \frac{\varepsilon^2\,t^{29}}{69\,486\,899\,863\,110\,492\,959\,139}, \quad t \in [2,3].$$

Далі, за допомогою ітераційної схеми (3) маємо

$$z_3(t,\varepsilon) := z_0(t,h_0^*) + u_1(t,\varepsilon) + u_2(t,\varepsilon) + u_3(t,\varepsilon), \qquad \xi_3(\varepsilon) \approx -\frac{17\,478\,713\,\varepsilon^3}{1\,932\,114\,923},$$

де

$$
\begin{aligned}
u_3(t,\varepsilon) \approx{}& \frac{17\,306\,509\,\varepsilon^3}{105\,922\,779} + \frac{2\,343\,285\,\varepsilon^3\,t}{133\,006\,198} - \frac{13\,696\,966\,\varepsilon^3\,t^2}{426\,533\,031} + \frac{8\,969\,799\,\varepsilon^3\,t^3}{384\,005\,380} \\
&- \frac{5\,175\,804\,\varepsilon^3\,t^4}{73\,7581\,625} + \frac{560\,791\,\varepsilon^3\,t^5}{1\,956\,539\,603} + \frac{1\,323\,127\,\varepsilon^3\,t^6}{3\,685\,782\,794} - \frac{605\,111\,\varepsilon^3\,t^7}{5\,417\,144\,997} \\
&+ \frac{1\,123\,102\,\varepsilon^3\,t^8}{74\,799\,737\,939} + \frac{26\,735\,\varepsilon^3\,t^9}{93\,556\,702\,143} - \frac{51\,875\,\varepsilon^3\,t^{10}}{116\,212\,471\,649} + \frac{21\,153\,\varepsilon^3\,t^{11}}{260\,873\,993\,569} \\
&- \frac{5\,729\,\varepsilon^3\,t^{12}}{918\,936\,082\,923} - \frac{1\,110\,\varepsilon^3\,t^{13}}{2\,554\,820\,859\,653} + \frac{691\,\varepsilon^3\,t^{14}}{4\,070\,305\,346\,695} - \frac{198\,\varepsilon^3\,t^{15}}{9\,521\,346\,026\,671} \\
&+ \frac{2\,\varepsilon^3\,t^{16}}{2\,216\,669\,094\,855} + \frac{\varepsilon^3\,t^{17}}{7\,435\,250\,846\,944} - \frac{\varepsilon^3\,t^{18}}{34\,474\,126\,925\,901} \\
&+ \frac{\varepsilon^3\,t^{19}}{384\,404\,855\,163\,059} - \frac{\varepsilon^3\,t^{20}}{15\,315\,211\,743\,396\,069} - \frac{\varepsilon^3\,t^{21}}{66\,068\,136\,221\,073\,846} \\
&+ \frac{\varepsilon^3\,t^{22}}{427\,554\,682\,208\,164\,673} - \frac{\varepsilon^3\,t^{23}}{6\,035\,906\,658\,340\,674\,491} \\
&+ \frac{\varepsilon^3\,t^{24}}{325\,941\,387\,387\,473\,688\,329} + \frac{\varepsilon^3\,t^{25}}{1\,432\,853\,793\,622\,512\,534\,120} \\
&- \frac{\varepsilon^3\,t^{26}}{11\,149\,871\,678\,089\,556\,809\,010} + \frac{\varepsilon^3\,t^{27}}{166\,829\,907\,104\,797\,473\,026\,404} \\
&- \frac{\varepsilon^3\,t^{28}}{4\,133\,756\,249\,166\,422\,673\,272\,074}, \qquad t \in [1,2].
\end{aligned}
$$

Аналогічно одержуємо

$$
\begin{aligned}
u_3(t,\varepsilon) \approx{}& \frac{33\,799\,469\,\varepsilon^3}{123\,978\,735} - \frac{27\,671\,392\,\varepsilon^3\,t}{103\,509\,097} + \frac{80\,162\,802\,\varepsilon^3\,t^2}{312\,956\,417} - \frac{28\,056\,097\,\varepsilon^3\,t^3}{253\,312\,720} \\
&+ \frac{22\,042\,450\,\varepsilon^3\,t^4}{2\,211\,040\,209} + \frac{12\,896\,725\,\varepsilon^3\,t^5}{1\,024\,904\,609} - \frac{10\,976\,149\,\varepsilon^3\,t^6}{1\,507\,396\,546} + \frac{21\,848\,386\,\varepsilon^3\,t^7}{10\,141\,251\,039} \\
&- \frac{5\,267\,225\,\varepsilon^3\,t^8}{14\,018\,888\,978} + \frac{1\,032\,821\,\varepsilon^3\,t^9}{145\,399\,989\,676} + \frac{3\,510\,314\,\varepsilon^3\,t^{10}}{165\,250\,616\,937} - \frac{227\,186\,\varepsilon^3\,t^{11}}{26\,780\,659\,903} \\
&+ \frac{126\,261\,\varepsilon^3\,t^{12}}{63\,571\,836\,557} - \frac{51\,118\,\varepsilon^3\,t^{13}}{170\,394\,688\,603} + \frac{8001\,\varepsilon^3\,t^{14}}{490\,191\,808\,469} + \frac{23\,623\,\varepsilon^3\,t^{15}}{3\,542\,702\,352\,491} \\
&- \frac{4718\,\varepsilon^3\,t^{16}}{1\,765\,065\,219\,199} + \frac{908\,\varepsilon^3\,t^{17}}{1\,619\,229\,002\,013} - \frac{203\,\varepsilon^3\,t^{18}}{2\,789\,001\,812\,556} \\
&+ \frac{7\,\varepsilon^3\,t^{19}}{2\,840\,665\,467\,363} + \frac{6\,\varepsilon^3\,t^{20}}{3\,552\,163\,657\,945} - \frac{\varepsilon^3\,t^{21}}{1\,729\,497\,427\,085} \\
&+ \frac{\varepsilon^3\,t^{22}}{8\,596\,927\,988\,594} - \frac{\varepsilon^3\,t^{23}}{61\,072\,325\,759\,225} + \frac{\varepsilon^3\,t^{24}}{716\,963\,649\,032\,305} \\
&+ \frac{\varepsilon^3\,t^{25}}{27\,374\,895\,560\,754\,852} - \frac{\varepsilon^3\,t^{26}}{239\,50\,030\,340\,795\,176} + \frac{\varepsilon^3\,t^{27}}{105\,750\,330\,720\,736\,293}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{\varepsilon^3\, t^{28}}{735\,127\,243\,490\,392\,710} + \frac{\varepsilon^3\, t^{29}}{8\,532\,180\,647\,963\,661\,964} \\
&+ \frac{\varepsilon^3\, t^{30}}{422\,175\,825\,900\,356\,925\,447} - \frac{\varepsilon^3\, t^{31}}{296\,701\,984\,024\,387\,928\,473} \\
&+ \frac{\varepsilon^3\, t^{32}}{1\,208\,537\,605\,700\,050\,636\,196} - \frac{\varepsilon^3\, t^{33}}{7\,028\,238\,206\,372\,532\,628\,195} \\
&+ \frac{\varepsilon^3\, t^{34}}{50\,676\,248\,520\,319\,163\,720\,289} - \frac{\varepsilon^3\, t^{35}}{435\,013\,897\,462\,446\,339\,954\,800} \\
&+ \frac{\varepsilon^3\, t^{36}}{4\,403\,463\,330\,199\,553\,236\,367\,975}, \quad t \in [2,3].
\end{aligned}
$$

Відзначимо, що на відрізку $\varepsilon \in [0,1]$ існують константи

$$0 < \gamma \approx 0{,}731\,847 < 1, \qquad 0 < \delta \approx 0{,}984\,408 < 1,$$

для яких мають місце нерівності (4), які свідчать про практичну збіжність отриманих наближень до розв'язку нелінійної крайової задачі (5) із зосередженим запізненням.

Точність знайдених наближень до розв'язку

$$z(\cdot,\varepsilon) \in \mathbb{C}^1\big\{[0,3] \setminus \{1,2\}_I\big\}, \qquad z(t,\cdot) \in \mathbb{C}[0,\varepsilon_0]$$

нелінійної крайової задачі (5) визначають нев'язки

$$
\begin{aligned}
\Delta_k(\varepsilon) := \big\| & dz_k(t,\varepsilon)/dt - A(t)z_k(t,\varepsilon) \\
& - B(t)z_k(t-\Delta,\varepsilon) - f(t) - \varepsilon\, Z(z_k(t,\varepsilon), z_k(t-\Delta,\varepsilon), t, \varepsilon)\big\|, \quad k = 0,1,2,3.
\end{aligned}
$$

Зокрема,

$$
\begin{aligned}
\Delta_0(0{,}1) &\approx 0{,}0204\,111, & \Delta_1(0{,}1) &\approx 0{,}00175\,564, \\
\Delta_2(0{,}1) &\approx 0{,}000\,167\,972, & \Delta_3(0{,}1) &\approx 0{,}0000\,159\,096; \\
\Delta_0(0{,}01) &\approx 0{,}00204\,111, & \Delta_1(0{,}01) &\approx 0{,}0000\,172\,743, \\
\Delta_2(0{,}01) &\approx 1{,}67\,517 \times 10^{-7}, & \Delta_3(0{,}01) &\approx 1{,}58\,339 \times 10^{-9}.
\end{aligned}
$$

Відзначимо також, що знайдені наближення до розв'язку нелінійної крайової задачі (5) задовольняють крайову умову. Запропоновану у статті схему дослідження умов розв'язності та побудови розв'язків наближень до розв'язку крайової задачі (1) із зосередженим запізненням може бути перенесено на матричні крайові задачі [13 – 15], у тому числі з зосередженим запізненням [16, 17]. Зауважимо також, що на відміну від результатів Г. Адомяна для нелінійної системи з запізненням [18] ми отримали умови розв'язності та побудови розв'язків наближень до розв'язку нелінійної крайової задачі (1) із зосередженим запізненням.

Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів. Усі необхідні дані містяться в статті. Всі автори зробили рівномірний внесок у цю роботу. Дослідження Сергія Чуйка частково підтримано грантом у рамках двосторонньої угоди між Академією наук Австрії та НАН України. Дослідження Олександра Бойчука та Віктора Чуйка частково підтримано грантом Відділення цільової підготовки Київського національного університету імені Тараса Шевченка при НАН України 3М-2024 “Якісний аналіз та керування в нелінійних інтегро-диференціальних рівняннях із імпульсними та стохастичними збуреннями”, державний реєстраційний номер 0124U002140.

Література

1. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, 2nd ed., De Gruyter, Berlin (2016).
2. Н. В. Азбелев, Н. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина, *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений*, Наука, Москва (1991).
3. С. М. Чуйко, *Нетеровы краевые задачи с сосредоточенным запаздыванием в случае параметрического резонанса*, Материалы конференции, посвященной 95-летию со дня рождения профессора Н. В. Азбелева (Пермь, 17 – 19 мая 2017 г.), 287 – 294 (2017).
4. P. Benner, A. Seidel-Morgenstern, A. Zuyev, *Periodic switching strategies for an isoperimetric control problem with application to nonlinear chemical reactions*, Appl. Math. Model., **69**, 287 – 300 (2019).
5. P. Benner, S. Chuiko, A. Zuyev, *A periodic boundary value problem with switchings under nonlinear perturbations*, Bound. Value Probl., **50**, 1 – 12 (2023).
6. О. А. Бойчук, С. М. Чуйко, *Про наближене розв’язання нелінійних крайових задач за методом Ньютона – Канторовича*, Нелін. коливання, **23**, № 2, 162 – 183 (2020); ***English translation:*** J. Math. Sci., **258**, № 5, 594 – 617 (2021).
7. О. А. Бойчук, С. М. Чуйко, *Про наближене розв’язання слабконелінійних крайових задач методом Ньютона – Канторовича*, Нелін. коливання, **23**, № 3, 321 – 331 (2020); ***English translation:*** J. Math. Sci., **261**, № 2, 228 – 240 (2022).
8. А. М. Самойленко, С. М. Чуйко, О. В. Нєсмєлова, *Нелінійні крайові задачі, не розв’язані відносно похідної*, Укр. мат. журн., **72**, № 8, 1106 – 1118 (2020); ***English translation:*** Ukr. Math. J., **72**, № 8, 1280 – 1293 (2020).
9. G. Adomian, *A review of the decomposition method in applied mathematics*, J. Math. Anal. Appl., **135**, 501 – 544 (1988).
10. С. М. Чуйко, О. С. Чуйко, М. В. Попов, *Метод декомпозиції Адомяна у теорії нелінійних періодичних крайових задач*, Нелін. коливання, **25**, № 4, 413 – 425 (2022); ***English translation:*** J. Math. Sci., **277**, № 2, 338 – 351 (2023).
11. О. Б. Лыкова, А. А. Бойчук, *Построение периодических решений нелинейных систем в критических случаях*, Укр. мат. журн., **40**, № 1, 62 – 69 (1988).
12. С. М. Чуйко, *Область збіжності ітераційної процедури для автономної крайової задачі*, Нелін. коливання, **9**, № 3, 416 – 432 (2006); ***English translation:*** Nonlinear Oscil. (N. Y.), **9**, № 3, 405 – 422 (2006).
13. О. А. Бойчук, С. А. Кривошея, *Критерій розв’язності матричних рівнянь типу Ляпунова*, Укр. мат. журн., **50**, № 8, 1021 – 1026 (1998); ***English translation:*** Ukr. Math. J., **50**, № 8, 1162 – 1169 (1999).
14. S. Chuiko, *Weakly nonlinear boundary value problem for a matrix differential equation*, Miskolc Math. Notes, **17**, № 1, 139 – 150 (2016).
15. S. M. Chuiko, *Nonlinear matrix differential-algebraic boundary value problem*, Lobachevskii J. Math., **38(2)**, 236 – 244 (2017).
16. A. A. Boichuk, J. Diblik, D. Ya. Khusainov, M. Ruzickova, *Fredholm’s boundary-value problems for differential systems with a single delay*, Nonlinear Anal., **72**, 2251 – 2258 (2010).
17. С. М. Чуйко, Д. В. Сисоєв, *Матричні періодичні крайові задачі з зосередженим запізненням*, Нелін. коливання, **21**, № 2, 273 – 283 (2018); ***English translation:*** J. Math. Sci., **243**, № 2, 326 – 337 (2019).
18. G. Adomian, R. Rach, *Nonlinear stochastic differential delay equations*, J. Math. Anal. Appl., **91**, № 1, 94 – 101 (1983).

Одержано 03.01.24