

УЗАГАЛЬНЕНЕ ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ПСЕВДОПАРАБОЛІЧНИМИ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ СИСТЕМАМИ

Андрій Анікушин, Анастасія Андарал

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка
вул. Володимирська, 64, Київ, 01033, Україна
e-mail: anik_andrii@univ.kiev.ua, відповідальний за листування,
aandaral3@gmail.com*

We use a priori inequalities method in negative norms and prove well-posedness of the Dirichlet initial boundary-value problem for the pseudoparabolic integro-differential equation with Volterra-type integral terms. The existence of an optimal control of the corresponding systems for control operators acting in the spaces of generalized functions is also proved.

З використанням методу апіорних нерівностей у негативних нормах доведено коректність постановки початково-крайової задачі Діріхле для інтегро-диференціального рівняння псевдопараболічного типу з інтегральними доданками типу Вольтерра. Також доведено існування оптимального керування відповідними системами для операторів керування, що діють у просторах узагальнених функцій.

1. Вступ. У цій роботі ми розглянемо початково-крайову задачу для лінійного псевдопараболічного інтегро-диференціального рівняння з інтегральним оператором типу Вольтерра

$$\begin{aligned} a(x)u_t - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x)u_{tx_j})_{x_i} + b(x)u \\ - \sum_{i,j=1}^n (b_{ij}(x)u_{x_j})_{x_i} + \int_0^t \sum_{i=1}^n (K_i(x, t, \tau)u_{x_i})_{x_i} d\tau = f(x, t) \end{aligned} \quad (1)$$

за умов типу Діріхле

$$u|_{x \in \partial\Omega} = 0, \quad u|_{t=0} = 0. \quad (2)$$

Рівняння такого типу зустрічаються при розв'язанні різноманітних задач прикладної математики. В одній із перших робіт псевдопараболічне рівняння було отримано при дослідженні процесів теплопереносу в гетерогенному середовищі як більш адекватна модель процесів [1], а питання, пов'язані з дослідженням псевдопараболічних рівнянь, з'явилися вже у середині ХХ сторіччя, коли, зокрема, у роботах [2, 3] було показано коректність

постановок початково-крайових задач для рівняння типу $\left(au - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} u_{x_j})_{x_i} \right)_t + bu - \sum_{i,j=1}^n (b_{ij} u_{x_j})_{x_i} = f$.

Псевдопараболічні диференціальні рівняння зустрічаються при моделюванні різноманітних процесів: випромінювання із затримкою у часі [4], двофазні моделі потоку пористого середовища з динамічною капілярністю або гістерезисом [5], фазова модель поля для потоків ненасиченого пористого середовища [6], модель теплопровідності [7], моделі для опису світла [8] та ін. Для псевдопараболічного рівняння було отримано результати щодо існування, єдиності та неіснування класичних і узагальнених розв'язків, регулярності та асимптотичної поведінки розв'язків тощо (див., наприклад, [9] і наведену там бібліографію).

Псевдопараболічні диференціальні рівняння виникають також при дослідженні фільтрації рідини та газу в пористих середовищах і середовищах “із тріщинами”, теплопровідності в неоднорідних середовищах, міграції іонів у ґрунті, розповсюдження хвиль у дисперсному середовищі та в тонкому еластичному склі тощо [1].

Багато результатів щодо коректності постановок, оптимального керування та керованості процесами, що описуються рівняннями псевдопараболічного типу, отримано С. І. Ляшком за допомогою методики апіорних нерівностей у негативних нормах. Це зокрема роботи [10–12] (також див., наприклад, [13] і наведену там бібліографію).

Основні положення теорії апіорних нерівностей у негативних нормах і деякі її застосування описано у класичній монографії [1] і, частково, у роботах [14, 15]. Підхід, розроблений С. І. Ляшком і його учнями, виявився досить ефективним для дослідження різноманітних питань коректності постановок, оптимального керування, керованості систем із розподіленими параметрами. Ми не ставимо собі за мету навести тут повну бібліографію, що стосується цих питань, обмежившись лише деякими роботами: [12, 16–24].

Як виявилось, вказаний підхід може бути з успіхом застосований і до задач Діріхле для інтегро-диференціальних рівнянь із інтегральними складовими типу Вольтерра. У [25, 26] досліджено задачі з інтегро-диференціальним рівнянням гіперболічного типу, у [27] — для рівнянь еліптичного, а у [28, 29] — параболічних типів. Деякі спеціальні типи рівнянь із інтегральними складовими типу Вольтерра розглянуто також у [30, 31]. У роботі [32] було зібрано результати у цій галузі.

Зауважимо, що на відміну від звичайного псевдопараболічного рівняння, у якому майбутнє процесу залежить тільки від стану у цей момент, наявність інтегральної складової типу Вольтерра дозволяє врахувати історію процесу (див., наприклад, [33] і наведену там бібліографію).

Останнім часом у літературі з'явилося багато робіт, де розглядають інтегро-диференціальні рівняння типу (1) або близькі до нього. Так, у роботі [34] автори вивчають адаптивний метод найменших квадратів і оцінки апостеріорних похибок для задачі

$$u_t - \nabla \cdot (a(x) \nabla u_t + b(x) \nabla u + d(x) \int_0^t \nabla u(x, \tau) d\tau) + qu = f(x, t)$$

в області $\Omega \times (0, T]$ з умовами типу Діріхле

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \in (0, T],$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega.$$

У роботі [35] розглянуто одновимірну задачу вигляду

$$u_t = \left(a(x, t)u_{xt} + b(x, t)u_x + \int_0^t c(x, t, \tau)u_x(x, \tau) ds \right)_x + f(x, t)$$

для $(x, t) \in [0, 1] \times J$ з початково-крайовими умовами

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in J,$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0, 1].$$

Автором запропоновано дискретний H^1 змішаний метод скінченних елементів Гальоркіна для вказаного рівняння в одновимірному випадку. Отримано оцінки похибки оптимального порядку для невідомої скалярної функції u та її градієнту в L^2 і H^1 нормах.

У [36] отримано апіорні та апостеріорні оцінки похибки для H^1 змішаного методу скінченних елементів Гальоркіна для задачі оптимального керування системами, які описує лінійне псевдогіперболічне рівняння

$$y_{tt} - \operatorname{div} \nabla y - \operatorname{div} \nabla y_t + \int_0^t \operatorname{div} \nabla y(s) ds = f + u \quad \text{для } x \in \Omega, t \in (0, T]$$

з умовами

$$y(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, t \in (0, T],$$

$$y(x, 0) = y_0(x), \quad x \in \Omega,$$

$$y_t(x, 0) = y_1(x), \quad x \in \Omega.$$

У [37] запропоновано методику аналізу існування та єдиності розв'язку змішаної задачі для нелінійного інтегро-диференціального рівняння третього порядку псевдопараболічного типу з виродженим ядром

$$K(t, s) = \sum_{i=1}^m a_i(t)a_i(s)$$

на основі методу послідовних наближень. Зокрема, розглянуто задачу

$$\begin{aligned} U_t(t, x) - U_{txx}(t, x) - \mu \int_0^T K(t, s)U_{xx}(s, x) ds \\ = \nu(t) \int_0^T U(\theta, x) d\theta + f \left(x, \int_0^T \int_0^l H(\theta, y)U(\theta, y) dy d\theta \right) \end{aligned}$$

з початково-крайовими умовами

$$U(0, x) = \varphi(x),$$

$$U(t, 0) = U(t, l) = 0$$

і деякими обмеженнями на коефіцієнти.

У [38] вивчено початково-крайову задачу для нелінійного псевдопараболічного рівняння з інтегральною складовою

$$u_t - \Delta u - \Delta u_t + \int_0^t \lambda(t - \tau) \Delta u(\tau) d\tau = |u|^{p-1} u$$

з початковими та граничними умовами Діріхле. За допомогою методу Гальоркіна і теорії потенціалів доведено існування глобального розв'язку та деякі властивості розривності розв'язків.

У роботах [39–41] автори, зокрема з використанням ідей і методів теорії псевдообернених матриць і операторів, розробленої О. А. Бойчуком і А. М. Самойленком у [42], розглядали системи інтегро-диференціальних рівнянь із виродженими ядрами, зокрема, досліджували існування розв'язків.

Розроблену в [42] техніку та поняття сильного узагальненого розв'язку операторного рівняння з [14] також застосовано у роботі [43] для дослідження абстрактного рівняння Шредінгера у гільбертовому просторі.

Великий огляд, присвячений нелінійним диференціальним і інтегро-диференціальним рівнянням псевдопараболічного типу, подано у [9].

У цій статті ми доводимо апіорні нерівності для задачі (1), (2). Тим самим розширюємо клас рівнянь, до яких може бути застосовано цитований вище метод. На основі цих нерівностей обґрунтовуємо коректність постановки початково-крайової задачі. Далі наводимо теорему про існування оптимального керування, де керування здійснюється різноманітними типами операторів через праву частину рівняння (1). Відзначимо, що наведені оператори керування діють у просторах узагальнених функцій, що може моделювати імпульсно-точкову дію на систему.

2. Постановка задачі. Розглянемо циліндричну область $Q = \Omega \times (0, T)$, де Ω — обмежена область у $\mathbb{R}^n$ із гладкою межею $\partial\Omega$, та лінійне рівняння з інтегро-диференціальним оператором

$$\mathcal{L}u \equiv L_D u + L_I u = f(x, t). \quad (3)$$

Тут $u(x, t)$ — шукана функція, що описує стан системи в області Q , а диференціальну та інтегральну частини оператора $\mathcal{L}$ задано виразами

$$L_D u \equiv (Au)_t + Bu, \quad (4)$$

$$L_I u \equiv \int_0^t \sum_{i=1}^n (K_i(x, t, \tau) u_{x_i}(x, \tau))_{x_i} d\tau, \quad (5)$$

де

$$Au \equiv - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(x) u_{x_j})_{x_i} + a(x)u, \quad (6)$$

$$Bu \equiv - \sum_{i,j=1}^n (b_{ij}(x) u_{x_j})_{x_i} + b(x)u. \quad (7)$$

Далі будемо вважати, що $\{a_{ij}\}_{i,j=1}^n, \{b_{ij}\}_{i,j=1}^n \subset C^1(\overline{\Omega})$, $a, b \in C(\overline{\Omega})$, для всіх $x \in \Omega$ мають місце співвідношення

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad b_{ij}(x) = b_{ji}(x), \quad a(x) \geq 0, \quad b(x) \geq 0, \quad (8)$$

та коефіцієнти $a_{ij}(x)$ і $b_{ij}(x)$ при довільних $\xi_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$, і $x \in \overline{\Omega}$ задовольняють умови

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad (9)$$

$$\sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq 0 \quad (10)$$

для деякої додатної сталої α .

Уважатимемо також, що ядра $K_i(x, t, \tau)$ є неперервно диференційовними. Зокрема, для деякої сталої M справджується нерівність $|K_i(x, t, \tau)| < M$ для всіх $x \in \Omega$ і $t, \tau \in [0, T]$.

Зауваження 1. Зазначимо, що умови на гладкість коефіцієнтів диференціальної частини та (8)–(10) є класичними умовами з [1]. Насправді, при переході до узагальненої (слабкої) постановки отримані нами результати будуть правильні й за більш слабких умов на гладкість коефіцієнтів. Наприклад, замість неперервної диференційовності ядер K_i достатньо вимагати лише обмеженості та інтегровності.

Областю визначення оператора $\mathcal{L}$ вважатимемо простір, що складається з множини гладких, тобто нескінченну кількість разів диференційовних в області $\overline{Q}$ функцій, що задовольняють однорідні початкові та граничні умови типу Діріхле

$$u|_{t=0} = 0, \quad (11)$$

$$u|_{x \in \partial\Omega} = 0. \quad (12)$$

Множину гладких функцій, що задовольняють умови (11), (12), будемо позначати через C_{BR}^∞ .

Розглянемо простір W_{BR}^+ , що є поповненням C_{BR}^∞ за нормою

$$\|u\|_{W_{BR}^+} = \left(\int_Q u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i t}^2 dQ \right)^{1/2}. \quad (13)$$

Зауваження 2. Нескладно показати, що норма (13) є еквівалентною до норми

$$\|u\| = \left(\int_Q u_t^2 + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i t} u_{x_j t} dQ \right)^{1/2}.$$

Також розглянемо спряжений оператор, що має вигляд $\mathcal{L}^* v \equiv L_D^* v + L_I^* v$,

$$L_D^* v \equiv -(Av)_t + Bv, \quad L_I^* v \equiv \int_t^T \sum_{i=1}^n (K_i(x, \tau, t) v_{x_i}(x, \tau))_{x_i} d\tau. \quad (14)$$

Областю визначення оператора $\mathcal{L}^*$ вважаємо простір, який складається з множини гладких у області $\overline{Q}$ функцій, що задовольняють початкові та граничні умови

$$v|_{t=T} = 0, \quad (15)$$

$$v|_{x \in \partial\Omega} = 0. \quad (16)$$

Множину таких функцій позначатимемо через C_{BR+}^∞ , а через W_{BR+}^+ позначимо поповнення множини C_{BR+}^∞ за тією ж нормою (13).

Розглянемо негативні простори W_{BR}^- , W_{BR+}^- [44], побудовані за позитивними просторами W_{BR}^+ , W_{BR+}^+ відповідно, відносно $L_2(Q)$. Зокрема, справедливі такі щільні та неперервні вкладення: $W_{BR}^+ \subset L_2(Q) \subset W_{BR}^-$, $W_{BR+}^+ \subset L_2(Q) \subset W_{BR+}^-$.

Через H_{BR}^+ позначимо поповнення простору гладких функцій у області $\overline{Q}$, що задовольняють початкові та граничні умови (11), (12) за нормою

$$\|u\|_{H_{BR}^+}^2 = \int_Q \left(u^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 \right) dQ. \quad (17)$$

Простір H_{BR+}^+ — поповнення простору гладких функцій у області $\overline{Q}$, що задовольняють початкові та граничні умови (15), (16) за тією ж самою нормою (17). Через H_{BR}^- , H_{BR+}^- позначимо відповідні негативні простори.

Зауваження 3. Простори H_{BR}^+ , H_{BR+}^+ щільно та неперервно вкладаються в $L_2(Q)$.

У подальшому нам знадобиться така лема.

Лема 1. Нехай $f \in C^1([0, T])$, $f(T) = 0$ і для довільних $t, \tau \in [0, T]$ справджується нерівність $|K(t, \tau)| \leq M$. Тоді для довільної сталої $c > 0$ має місце нерівність

$$\left| \int_0^T \int_0^t K(t, \tau) e^{c\tau} f'(\tau) d\tau f(t) dt \right| \leq \frac{MT}{c} \int_0^T e^{ct} (f'(t))^2 dt.$$

Доведення. Інтегруючи частинами та використовуючи $f(T) = 0$, маємо

$$\int_0^T f(t) \int_0^t K(t, \tau) e^{c\tau} f'(\tau) d\tau dt = - \int_0^T \left[f'(t) \int_0^t \left(\int_0^s K(s, \tau) e^{c\tau} f'(\tau) d\tau \right) ds \right] dt = I.$$

Оцінимо цей вираз у такий спосіб:

$$|I| \leq \int_0^T \left[|f'(t)| \int_0^t \left(\int_0^s |K(s, \tau) e^{c\tau} f'(\tau)| d\tau \right) ds \right] dt \leq M \int_0^T \left[|f'(t)| \int_0^t \left(\int_0^s e^{c\tau} |f'(\tau)| d\tau \right) ds \right] dt.$$

За допомогою нерівності Коші – Буняковського отримуємо

$$\int_0^s e^{c\tau} |f'(\tau)| d\tau \leq \left(\int_0^s e^{c\tau} d\tau \int_0^s e^{c\tau} (f'(\tau))^2 d\tau \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{c} (e^{cs} - 1) \int_0^s e^{c\tau} (f'(\tau))^2 d\tau \right)^{1/2},$$

$$\int_0^s e^{c\tau} |f'(\tau)| d\tau \leq \left(\int_0^s e^{c\tau} d\tau \int_0^s e^{c\tau} (f'(\tau))^2 d\tau \right)^{1/2} \leq \left(\frac{e^{cs}}{c} \int_0^T e^{c\tau} (f'(\tau))^2 d\tau \right)^{1/2}.$$

Використовуючи останню нерівність і застосовуючи нерівність Коші – Буняковського ще раз, маємо

$$\begin{aligned} |I| &\leq M \int_0^T \left[|f'(t)| \int_0^t \left(\frac{e^{cs}}{c} \int_0^T e^{c\tau} (f'(\tau))^2 d\tau \right)^{1/2} ds \right] dt \\ &\leq M \int_0^T \left[|f'(t)| \left(\int_0^t \frac{e^{cs}}{c} ds \int_0^t \int_0^T e^{c\tau} (f'(\tau))^2 d\tau ds \right)^{1/2} \right] dt \\ &= M \int_0^T \left[|f'(t)| \left(\frac{e^{ct}}{c^2} \int_0^t \int_0^T e^{c\tau} (f'(\tau))^2 d\tau ds \right)^{1/2} \right] dt \\ &\leq M \int_0^T \left[|f'(t)| \left(\frac{e^{ct}}{c^2} T \int_0^T e^{c\tau} (f'(\tau))^2 d\tau \right)^{1/2} \right] dt \\ &\leq \frac{M}{c} \int_0^T \left[e^{ct/2} |f'(t)| \left(T \int_0^T e^{c\tau} (f'(\tau))^2 d\tau \right)^{1/2} \right] dt \\ &\leq \frac{M}{c} \left(\int_0^T e^{ct} (f'(t))^2 dt \int_0^T T \int_0^T e^{c\tau} (f'(\tau))^2 d\tau dt \right)^{1/2} = \frac{MT}{c} \int_0^T e^{ct} (f'(t))^2 dt, \end{aligned}$$

що й треба було довести.

Аналогічно можна довести й таке твердження.

Лема 2. Нехай $f \in C^1([0, T])$, $f(0) = 0$ і для довільних $t, \tau \in [0, T]$ справджується нерівність $|K(t, \tau)| \leq M$. Тоді для довільної сталої $c > 0$ має місце нерівність

$$\left| \int_0^T \int_t^T K(\tau, t) e^{-c\tau} f'(\tau) d\tau f(t) dt \right| \leq \frac{MT}{c} \int_0^T e^{-ct} (f'(t))^2 dt.$$

3. Априорні нерівності. Для дослідження існування та єдиності узагальненого розв'язку доведемо деякі нерівності для операторів $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^*$. У наступних лемах уважатимемо, що C може позначати різні сталі, коли це не важливо.

Лема 3. Існує така стала $C > 0$, що для довільної функції $u(x, t) \in W_{BR}^+$ виконується нерівність

$$C \|u\|_{W_{BR}^+} \geq \|\mathcal{L}u\|_{W_{BR}^-}.$$

Доведення. Розглянемо гладку функцію $u(x, t) \in W_{BR}^+$, яка задовольняє умови (11), (12). Для будь-якої функції $v(x, t) \in C_{BR^+}^\infty$ розглянемо скалярний добуток $(\mathcal{L}u, v)_{L_2(Q)}$.

У [1] показано, що для деякої сталої C виконується нерівність

$$|(L_D u, v)_{L_2(Q)}| \leq C \|v\|_{W_{BR^+}^+} \|u\|_{W_{BR}^+}.$$

Далі оцінимо $(L_I u, v)_{L_2(Q)}$. Використовуючи формулу Гаусса – Остроградського, нерівність Коші – Буняковського та беручи до уваги умови (11), (12), можна отримати

$$\begin{aligned} |(L_I u, v)_{L_2(Q)}| &= \left| \sum_{i=1}^n \int_Q \int_0^t K_i(x, t, \tau) u_{x_i}(x, \tau) v_{x_i}(x, t) d\tau dQ \right| \\ &\leq M \sum_{i=1}^n \int_Q |v_{x_i}(x, t)| \left(\int_0^t d\tau \int_0^t u_{x_i}^2(x, \tau) d\tau \right)^{1/2} dQ \\ &\leq MT \sum_{i=1}^n \left(\int_Q v_{x_i}^2(x, t) dQ \int_Q u_{x_i}^2(x, t) dQ \right)^{1/2} \\ &\leq MT \left(\sum_{i=1}^n \int_Q v_{x_i}^2(x, t) dQ \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n \int_Q u_{x_i}^2(x, t) dQ \right)^{1/2} \\ &\leq MT C_p^2 \left(\int_Q \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2(x, t) dQ \right)^{1/2} \left(\int_Q \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2(x, t) dQ \right)^{1/2} \\ &\leq MT C_p^2 \|v\|_{W_{BR^+}^+} \|u\|_{W_{BR}^+}. \end{aligned}$$

Тут C_p — стала з нерівності Пуанкаре $\|u\|_{L_2(Q)} \leq C_p \|u_t\|_{L_2(Q)}$. Загалом, маємо

$$\begin{aligned} |(\mathcal{L}u, v)_{L_2(Q)}| &= |(L_D u, v)_{L_2(Q)} + (L_I u, v)_{L_2(Q)}| \leq |(L_D u, v)_{L_2(Q)}| + |(L_I u, v)_{L_2(Q)}| \\ &\leq C \|v\|_{W_{BR^+}^+} \|u\|_{W_{BR}^+} + MT C_p^2 \|v\|_{W_{BR^+}^+} \|u\|_{W_{BR}^+} \leq C_1 \|v\|_{W_{BR^+}^+} \|u\|_{W_{BR}^+} \end{aligned}$$

для деякої сталої C_1 . Поділивши останню нерівність на $\|v\|_{W_{BR^+}^+}$, перейшовши до супремуму по v та спираючись на щільність множини $C_{BR^+}^\infty$ у просторі $W_{BR^+}^+$, отримаємо шукану нерівність.

Аналогічно можна довести й таке твердження.

Лема 4. Існує така стала $C > 0$, що для довільної функції $v(x, t) \in W_{BR^+}^+$ виконується нерівність

$$C \|v\|_{W_{BR^+}^+} \geq \|\mathcal{L}^* v\|_{W_{BR}^-}.$$

Зауваження 4. Нерівності, які доведено у лемах 3, 4, дозволяють розширити оператори $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^*$ з їхніх областей визначення на простори W_{BR}^+ , W_{BR+}^+ відповідно за неперервністю. Збережемо за розширеними операторами ті самі позначення. Тепер нерівності, вказані у лемах 3, 4, будуть справджуватися вже для всіх $u \in W_{BR}^+$, $v \in W_{BR+}^+$.

Лема 5. Існує така стала $C > 0$, що для довільної функції $u(x, t) \in W_{BR}^+$ виконується нерівність

$$\|\mathcal{L}u\|_{W_{BR+}^-} \geq C\|u\|_{H_{BR}^+}.$$

Доведення. Спочатку розглянемо гладку функцію $u(x, t) \in C_{BR}^\infty$. Нехай

$$v(x, t) = - \int_T^t e^{-c\tau} u(x, \tau) d\tau, \quad (18)$$

де c — додатна стала. Тоді $u(x, t) = -e^{ct}v_t(x, t)$ та очевидно, що $v(x, t) \in W_{BR+}^+$. Доведемо, що $(\mathcal{L}u, v)_{L_2(Q)} \geq C\|v\|_{W_{BR+}^+}^2$.

Розглянемо спочатку $(L_D u, v)_{L_2(Q)}$. За допомогою інтегрування частинами отримаємо

$$\int_Q a(x)u_t v dQ = - \int_Q a(x)v_t u dQ = - \int_Q a(x)v_t (-e^{ct}v_t) dQ = \int_Q a(x)e^{ct}v_t^2 dQ. \quad (19)$$

Далі маємо

$$\begin{aligned} \int_Q b(x)uv dQ &= - \int_Q b(x)e^{ct}v_t v dQ = - \frac{1}{2} \int_Q (b(x)e^{ct}v^2)_t dQ + \frac{1}{2} \int_Q cb(x)e^{ct}v^2 dQ \\ &= \frac{1}{2} \int_\Omega b(x)v^2(x, 0) d\Omega + \frac{1}{2} \int_Q cb(x)e^{ct}v^2 dQ \geq \frac{1}{2} \int_Q cb(x)e^{ct}v^2 dQ. \end{aligned} \quad (20)$$

З умов (11) і (18) можна одержати, що $\int_Q \sum_{i,j=1}^n ((a_{ij}u_{x_j})_{x_i}v)_t dQ = 0$, а тоді, використовуючи формулу Гаусса – Остроградського та враховуючи умови (15), (16), отримаємо

$$\begin{aligned} - \int_Q \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}u_{x_j})_{x_i} t v dQ &= \int_Q \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}u_{x_j})_{x_i} v_t dQ \\ &= \int_Q \sum_{i,j=1}^n a_{ij} e^{ct} v_{x_j} t v_{x_i} dQ \geq \alpha \int_Q e^{ct} \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 dQ. \end{aligned} \quad (21)$$

Аналогічно з формули Гаусса – Остроградського, враховуючи симетричність коефіцієнтів b_{ij} та умови (15), (16), можна одержати

$$- \int_Q v \sum_{i,j=1}^n (b_{ij}u_{x_j})_{x_i} dQ = \int_Q \sum_{i,j=1}^n b_{ij} u_{x_j} v_{x_i} dQ = - \int_Q e^{ct} \sum_{i,j=1}^n b_{ij} v_{x_j} t v_{x_i} dQ$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \int_Q \sum_{i,j=1}^n (b_{ij} e^{ct} v_{x_j} v_{x_i})_t dQ + \frac{1}{2} \int_Q \sum_{i,j=1}^n c b_{ij} e^{ct} v_{x_i} v_{x_j} dQ \\
&\geq \frac{1}{2} \int_Q \sum_{i,j=1}^n c b_{ij} e^{ct} v_{x_i} v_{x_j} dQ.
\end{aligned} \tag{22}$$

З урахуванням (19) – (22) запишемо загальну оцінку

$$\begin{aligned}
(L_D u, v)_{L_2(Q)} &= \int_Q a(x) u_t v dQ + \int_Q b(x) u v dQ \\
&\quad - \int_Q v \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} u_{x_j})_{x_i} t dQ - \int_Q v \sum_{i,j=1}^n (b_{ij} u_{x_j})_{x_i} dQ \\
&\geq \int_Q a(x) e^{ct} v_t^2 dQ + \frac{1}{2} \int_Q c b(x) e^{ct} v^2 dQ \\
&\quad + \alpha \int_Q e^{ct} \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 dQ + \frac{1}{2} \int_Q \sum_{i,j=1}^n c b_{ij} e^{ct} v_{x_i} v_{x_j} dQ.
\end{aligned}$$

Враховуючи (10) і невід’ємність доданків $\int_Q a(x) e^{ct} v_t^2 dQ$, $\int_Q c b(x) e^{ct} v^2 dQ$, маємо

$$(L_D u, v)_{L_2(Q)} \geq \alpha \int_Q e^{ct} \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 dQ. \tag{23}$$

Тепер розглянемо $(L_I u, v)_{L_2(Q)}$. З формули Гаусса – Остроградського з урахуванням початково-крайових умов отримуємо

$$\begin{aligned}
(L_I u, v)_{L_2(Q)} &= \sum_{i=1}^n \int_Q \int_0^t (K_i(x, t, \tau) u_{x_i}(x, \tau))_{x_i} d\tau v(x, t) dQ \\
&= - \sum_{i=1}^n \int_Q \int_0^t K_i(x, t, \tau) u_{x_i}(x, \tau) d\tau v_{x_i}(x, t) dQ \\
&= \sum_{i=1}^n \int_Q \int_0^t K_i(x, t, \tau) e^{c\tau} v_{x_i \tau}(x, \tau) d\tau v_{x_i}(x, t) dQ.
\end{aligned}$$

Скориставшись лемою 1, для кожного доданка в останній сумі одержимо

$$|(L_I u, v)_{L_2(Q)}| = \left| \int_Q \int_0^t \sum_{i=1}^n K_i(x, t, \tau) e^{c\tau} v_{x_i \tau}(x, \tau) d\tau v_{x_i}(x, t) dQ \right| \leq \frac{MT}{c} \int_Q e^{ct} \sum_{i=1}^n v_{x_i}^2 dQ. \tag{24}$$

Комбінуючи (23) і (24), обираючи $c = \frac{2MT}{\alpha}$ і зважаючи на нерівність Пуанкаре, маємо

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}u, v)_{L_2(Q)} &= (L_D u, v)_{L_2(Q)} + (L_I u, v)_{L_2(Q)} \geq (L_D u, v)_{L_2(Q)} - |(L_I u, v)_{L_2(Q)}| \\ &\geq \alpha \int_Q e^{ct} \sum_{i=1}^n v_{x_i t}^2 dQ - \frac{MT}{c} \int_Q e^{ct} \sum_{i=1}^n v_{x_i t}^2 dQ \geq \frac{\alpha}{2} \int_Q e^{ct} \sum_{i=1}^n v_{x_i t}^2 dQ \geq C \|v\|_{W_{BR^+}^+}^2. \end{aligned} \quad (25)$$

Застосовуючи стандартним чином нерівність Шварца до лівої частини, отримуємо $(\mathcal{L}u, v)_{L_2(Q)} \leq \|\mathcal{L}u\|_{W_{BR^+}^-} \|v\|_{W_{BR^+}^+}$. Враховуючи (25), маємо $C \|v\|_{W_{BR^+}^+} \leq \|\mathcal{L}u\|_{W_{BR^+}^-}$. Оскільки між $u(x, t)$ і $v(x, t)$ справджується співвідношення

$$\|u\|_{H_{BR}^+}^2 = \int_Q \left(e^{2ct} v_t^2 + \sum_{i=1}^n e^{2ct} v_{x_i t}^2 \right) dQ \leq e^{2cT} \int_Q \left(v_t^2 + \sum_{i=1}^n v_{x_i t}^2 \right) dQ = e^{2cT} \|v\|_{W_{BR^+}^+}^2,$$

то

$$\|\mathcal{L}u\|_{W_{BR^+}^-} \geq C \|v\|_{W_{BR^+}^+} \geq C e^{-2cT} \|u\|_{H_{BR}^+} \geq C_1 \|u\|_{H_{BR}^+}$$

для деякої сталої C_1 . Таким чином, твердження леми доведено для всіх $u \in C_{BR}^\infty$.

Для решти функцій з W_{BR}^+ потрібне твердження можна встановити за допомогою граничного переходу. А саме: нехай $u \in W_{BR}^+$ (необов'язково гладка). Внаслідок щільності вкладення $C_{BR}^\infty \subset W_{BR}^+$ елемент u можна наблизити послідовністю елементів $u_m \in C_{BR}^\infty$. Тобто $\|u - u_m\|_{W_{BR}^+} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Внаслідок леми 3 має місце нерівність $\|\mathcal{L}u - \mathcal{L}u_m\|_{W_{BR^+}^-} \leq C_1 \|u - u_m\|_{W_{BR}^+}$. А отже, $\mathcal{L}u_m \rightarrow \mathcal{L}u$ у просторі $W_{BR^+}^-$. При цьому для кожного елемента u_m внаслідок доведеного вище має місце нерівність

$$C \|u_m\|_{H_{BR}^+} \leq \|\mathcal{L}u_m\|_{W_{BR^+}^-}. \quad (26)$$

Залишилося зазначити, що зі збіжності у просторі W_{BR}^+ випливає збіжність у H_{BR}^+ , а тому $\|u - u_m\|_{H_{BR}^+} \rightarrow 0$. Тепер, переходячи до границі при $m \rightarrow \infty$ у нерівності (26), отримуємо потрібне твердження.

Лема 6. Існує така стала $C > 0$, що для довільної функції $v(x, t) \in W_{BR^+}^+$ виконується нерівність

$$\|\mathcal{L}^* v\|_{W_{BR}^-} \geq C \|v\|_{H_{BR^+}^+}.$$

Доведення цієї леми аналогічне до доведення леми (4), якщо розглянути допоміжну функцію

$$u(x, t) = \int_0^t e^{c\tau} v(x, \tau) d\tau,$$

де c — додатна стала, а для оцінки інтегральної складової застосувати лему 2.

4. Узагальнена розв'язність. Розглянемо задачі

$$\mathcal{L}u = f, \quad f \in W_{BR^+}^-, \quad (27)$$

$$\mathcal{L}^*v = g, \quad g \in W_{BR}^-. \quad (28)$$

Розв'язки задачі (27) будемо розуміти в сенсі таких означень.

Означення 1. Розв'язком задачі (27) із правою частиною $f \in W_{BR^+}^-$ називають функцію $u \in W_{BR}^+$, для якої існує послідовність функцій $u_i \in C_{BR}^\infty$, $i = 1, 2, \dots$, таких, що

$$\|u - u_i\|_{W_{BR}^+} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0, \quad \|\mathcal{L}u_i - f\|_{W_{BR^+}^-} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0.$$

Означення 2. Сильним розв'язком задачі (27) із правою частиною $f \in W_{BR^+}^-$ називають функцію $u \in W_{BR}^+$ таку, що $\mathcal{L}u = f$ у просторі $W_{BR^+}^-$.

Означення 3. Слабким розв'язком задачі (27) із правою частиною $f \in W_{BR^+}^-$ називають функцію $u \in W_{BR}^+$ таку, що рівність

$$(\mathcal{L}u, v)_{W_{BR}^+} = (f, v)_{W_{BR^+}^-}$$

виконується для будь-яких функцій $v \in W_{BR^+}^+$ таких, що $\mathcal{L}^*v \in H_{BR}^-$.

Можна розглянути визначення розв'язку задачі (27) у ширшому класі H_{BR}^+ .

Означення 4. Розв'язком задачі (27) із правою частиною $f \in W_{BR^+}^-$ називають функцію $u \in H_{BR}^+$, для якої існує послідовність функцій $u_i \in C_{BR}^\infty$, $i = 1, 2, \dots$, таких, що

$$\|u - u_i\|_{H_{BR}^+} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0, \quad \|\mathcal{L}u_i - f\|_{W_{BR^+}^-} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0.$$

Означення 5. Слабким розв'язком задачі (27) із правою частиною $f \in W_{BR^+}^-$ називають функцію $u \in H_{BR}^+$ таку, що рівність

$$(u, \mathcal{L}^*v)_{H_{BR}^+} = (f, v)_{W_{BR^+}^-}$$

виконується для будь-яких функцій $v \in W_{BR^+}^+$, $\mathcal{L}^*v \in H_{BR}^-$.

Аналогічно можна ввести означення і для розв'язку спряженої задачі (28).

У попередньому пункті для операторів $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^*$ доведено нерівності

$$C_1\|u\|_{H_{BR}^+} \leq \|\mathcal{L}u\|_{W_{BR^+}^-} \leq C_2\|u\|_{W_{BR}^+}, \quad (29)$$

$$C_1\|v\|_{H_{BR^+}^+} \leq \|\mathcal{L}^*v\|_{W_{BR}^-} \leq C_2\|v\|_{W_{BR^+}^+} \quad (30)$$

для довільних $u \in W_{BR}^+$, $v \in W_{BR^+}^+$. Ґрунтуючись на цих нерівностях і використовуючи результати з [1], можна сформулювати теореми узагальненої розв'язності.

Теорема 1. Означення (1)–(3) еквівалентні.

Теорема 2. Означення (4), (5) еквівалентні.

Теорема 3. Для будь-якої функції $f \in H_{BR^+}^-$ існує єдиний розв'язок $u \in W_{BR}^+$ задачі (27) у сенсі означень 1–3. Причому для деякої сталої C , що не залежить від f , виконується нерівність

$$\|u\|_{W_{BR}^+} \leq C\|f\|_{H_{BR^+}^-}.$$

Теорема 4. Для будь-якої функції $f \in W_{BR}^{-}$ існує єдиний розв'язок $u \in H_{BR}^{+}$ задачі (27) у сенсі означень 4, 5. Причому для деякої сталої C , що не залежить від f , виконується нерівність

$$\|u\|_{H_{BR}^{+}} \leq C \|f\|_{W_{BR}^{-}}.$$

Зауваження 5. Аналогічні теореми можна сформулювати й для спряженої задачі (28).

5. Оптимальне керування. Розглянемо тепер задачу оптимального керування системою, еволюцію якої описує рівняння

$$\mathcal{L}u = f + \mathcal{A}h. \quad (31)$$

Тут h — керування, що належить деякій множині допустимих керувань $\mathcal{U}$ з простору керувань $\mathcal{H}$, та $\mathcal{A}$ — деякий оператор. На розв'язках рівняння (31) задано функціонал $J(h) = \Phi(u(h))$, який треба мінімізувати при умові $h \in \mathcal{U}$.

Розглянемо декілька операторів $\mathcal{A}$ і вкажемо відповідні простори керувань для них:

$$\mathcal{A}_1 h = \sum_{k=1}^d \delta(t - t_k) \otimes \varphi_k(x), \quad t, t_k \in [0, T], \quad \varphi_k(x) \in L_2(\Omega). \quad (32)$$

Тут

$$h = \{(t_k, \varphi_k(x))\}_{k=1}^d, \quad \mathcal{H} = ([0, T] \times L_2(\Omega))^d.$$

Під $\mathcal{A}_1 h$ ми розуміємо функціонал, що діє на гладких у $\overline{Q}$ функціях таким чином:

$$(\mathcal{A}_1 h)(v) = \sum_{k=1}^d \int_{\Omega} v(t_k, x) \varphi_k(x) d\Omega.$$

У подальшому, для спрощення викладу, припустимо, що область Ω є циліндричною за змінною x_1 , тобто $\Omega = [a, b] \times \Omega'$,

$$\mathcal{A}_2 h = \sum_{k=1}^d \delta(x_1 - x_{1,k}) \otimes \varphi_k(t, x_2, \dots, x_n), \quad (33)$$

$$x_1, x_{1,k} \in [a, b], \quad \varphi_k(t, x_2, \dots, x_n) \in L_2((0, T) \times \Omega').$$

Тут

$$h = \{(x_{1,k}, \varphi_k(t, x_2, \dots, x_n))\}_{k=1}^d, \quad \mathcal{H} = ([a, b] \times L_2((0, T) \times \Omega'))^d.$$

Під $\mathcal{A}_2 h$ ми розуміємо функціонал, що діє на гладких у $\overline{Q}$ функціях у такий спосіб:

$$(\mathcal{A}_2 h)(v) = \sum_{k=1}^d \int_{[0, T] \times \Omega'} v(t, x_{1,k}, x_2, \dots, x_n) \varphi_k(t, x_2, \dots, x_n) d\Omega' dt, \quad (34)$$

$$\mathcal{A}_3 h = \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^p \delta(t - t_i) \otimes \delta(x_1 - x_{1,k}) \otimes \varphi_{ik}(x_2, \dots, x_n),$$

$$x_1, x_{1,k} \in [a, b], \quad t, t_i \in [0, T], \quad \varphi_{ik}(x_2, \dots, x_n) \in L_2((0, T) \times \Omega').$$

Тут

$$h = \{(t_i, x_{1,k}, \varphi_{ik}(x_2, \dots, x_n))\}_{k=1}^d, \quad \mathcal{H} = [0, T]^p \times [a, b]^d \times (L_2(\Omega'))^{pd}.$$

Під $\mathcal{A}_3 h$ ми розуміємо функціонал, що діє на гладких у $\overline{Q}$ функціях так:

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_2 h)(v) &= \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^p \int_{\Omega'} v(t_i, x_{1,k}, x_2, \dots, x_n) \varphi_k(x_2, \dots, x_n) d\Omega', \\ \mathcal{A}_4 h &= \sum_{k=1}^d \delta(x_1 - a_k(t)) \otimes \varphi_k(t, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (35)$$

$$a_k(t) \in W_2^1(0, T), \quad \varphi_k(t, x_2, \dots, x_n) \in L_2((0, T) \times \Omega').$$

Тут

$$h = \{(a_k(t), \varphi_k(t, x_2, \dots, x_n))\}_{k=1}^d, \quad \mathcal{H} = (W_2^1(0, T) \times L_2((0, T) \times \Omega'))^d.$$

Під $\mathcal{A}_4 h$ ми розуміємо функціонал, що діє на гладких у $\overline{Q}$ функціях таким чином:

$$(\mathcal{A}_4 h)(v) = \sum_{k=1}^d \int_{[0, T] \times \Omega'} v(t, a_k(t), x_2, \dots, x_n) \varphi_k(t, x_2, \dots, x_n) d\Omega' dt.$$

Нескладно довести [1], що всі вказані оператори можна розглядати як відображення, які діють із відповідних просторів керувань $\mathcal{H}$ у $W_{BR^+}^-$ і є слабо-неперервними. Доведені апріорні нерівності (29), (30) дозволяють стверджувати [1], що справедлива така теорема.

Теорема 5. *Нехай стан системи описано розв'язком задачі (31) з одним із наведених операторів $\mathcal{A}$ та відповідним простором керувань $\mathcal{H}$. Припустимо, що множина допустимих керувань $\mathcal{U}$ є замкнутою, опуклою та обмеженою в $\mathcal{H}$, а критерій якості $\Phi(\cdot): H_{BR}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ є слабо напівнеперервним знизу за станом системи $u(t, x, h)$ й обмеженим знизу. Тоді існує оптимальне керування системою (31).*

Зауваження 6. За допомогою доведених апріорних нерівностей (29), (30) можна також довести деякі диференціальні властивості критерію якості, властивості регуляризованої задачі, побудувати та довести збіжність чисельних методів для пошуку узагальнених розв'язків і оптимального керування тощо.

Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів. Усі необхідні дані містяться в статті. Всі автори зробили рівномірний внесок у цю роботу. Автори висловлюють подяку фізико-математичному факультету Карлового університету, Прага, Чехія, за підтримку при написанні роботи.

Література

1. S. I. Lyashko, *Generalized optimal control of linear systems with distributed parameters*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2002).

2. R. E. Showalter, T. W. Ting, *Pseudoparabolic partial differential equations*, SIAM J. Math. Anal., **1**, № 1, 1–24 (1970).
3. V. R. Gopala Rao, T. W. Ting, *Solutions of pseudo-heat equations in the whole space*, Arch. Ration. Mech. Anal., **247**, № 49, 57–78 (1972).
4. E. Milne, *The diffusion of imprisoned radiation through a gas*, J. Lond. Math. Soc., № 1, 40–51 (1926).
5. S. M. Hassanizadeh, W. G. Gray, *Thermodynamic basis of capillary pressure in porous media*, Water Resour. Res., № 29, 3389–3405 (1993).
6. L. Cueto-Felgueroso, R. Juanes, *A phase-field model of unsaturated flow*, Water Resour. Res., **45**, 1–23 (2009).
7. L. I. Rubinstein, *On the problem of the process of propagation of heat in heterogeneous media*, Izv. Akad. Nauk SSSR, № 12, 27–45 (1948).
8. B. C. Aslan, W. W. Hager, S. Moskow, *A generalized eigenproblem for the Laplacian which arises in lightning*, J. Math. Anal. Appl., № 341, 1028–1041 (2008).
9. Huafei Di, Yadong Shang, Xiaoxiao Zheng, *Global well-posedness for a fourth order pseudo-parabolic equation with memory and source terms*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B, **21**, № 3, 781–801 (2016).
10. С. И. Ляшко, *Некоторые вопросы импульсно-точечного управления псевдопараболическими системами*, Укр. мат. журн., **37**, № 3, 368–371 (1985); **English translation:** Ukr. Mat. J., **37**, № 3, 292–295 (1985).
11. С. И. Ляшко, *Импульсно-точечное управление псевдопараболическими системами*, Кибернетика, № 2, 116–117 (1986).
12. S. I. Lyashko, V. V. Semenov, *Controllability of linear distributed systems in classes of generalized actions*, Cybernet. Systems Anal., № 37, 13–32 (2001).
13. I. V. Sergienko, O. M. Khimich, D. A. Klyushin, V. I. Lyashko, S. I. Lyashko, V. V. Semenov, *Formation and development of the scientific school of the mathematical theory of filtration*, Cybernet. Systems Anal., № 59, 61–70 (2023).
14. D. A. Klyushin, S. I. Lyashko, D. A. Nomirowskii, Yu. I. Petunin, V. V. Semenov, *Generalized solutions of operator equations and extreme elements*, Springer, New York (2011).
15. А. В. Анікушин, Д. А. Номіровський, *Узагальнені розв'язки для лінійних операторів з послабленими апіорними нерівностями*, Укр. мат. журн., **62**, № 8, 1011–1021 (2010); **English translation:** Ukr. Math. J., **62**, № 8, 1175–1186 (2011).
16. D. A. Nomirowskyi, *Generalized solvability of parabolic systems with nonhomogeneous transmission conditions of nonideal contact type*, Differ. Equat., **40**, № 10, 1467–1477 (2004).
17. S. I. Lyashko, D. A. Nomirowskyi, *Generalized solutions and optimal controls in systems describing the dynamics of a viscous stratified fluid*, Differ. Equat., **39**, № 1, 90–98 (2003).
18. S. I. Lyashko, D. A. Nomirowskii, T. I. Sergienko, *Trajectory and final controllability in hyperbolic and pseudohyperbolic systems with generalized actions*, Cybernet. Systems Anal., **37**, 756–763 (2001).
19. S. I. Lyashko, D. A. Nomirowskii, *The generalized solvability and optimization of parabolic systems in domains with thin low-permeable inclusions*, Cybernet. Systems Anal., **39**, 737–745 (2003).
20. D. A. Nomirowskyi, *Unique solvability of pseudohyperbolic equations with singular right-hand sides*, Math. Notes, **80**, № 3-4, 550–562 (2006).
21. D. A. Nomirowskyi, *The control of pseudohyperbolic systems*, J. Math. Sci., **97**, № 2, 3945–3951 (1999).
22. D. A. Nomirowskyi, *Generalized solvability and optimization of a parabolic system with a discontinuous solution*, J. Differential Equations, **233**, № 1, 1–21 (2007).
23. D. A. Nomirowskii, O. I. Vostrikov, *Generalized statements and properties of models of transport processes in domains with cuts*, Cybernet. Systems Anal., **52**, 931–942 (2016).
24. I. B. Tymchyshyn, D. A. Nomirowskii, *Generalized solvability of a parabolic model describing transfer processes in domains with thin inclusions*, Differ. Equat., № 57, 1053–1062 (2021).
25. А. В. Анікушин, *Узагальнена розв'язність гіперболічних інтегро-диференціальних рівнянь*, Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки, № 4, 60–65 (2013).
26. A. Anikushyn, O. Zhyvolovych, *Generalized solvability and optimal control for an integro-differential equation of a hyperbolic type*, Modeling, Control and Information Technologies: Proceedings of International Scientific and Practical Conference, № 5, 8–9 (2021).

27. А. В. Анікушин, *Узагальнена розв'язність лінійних інтегро-диференціальних рівнянь еліптичного типу*, Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки, № 3, 163 – 168 (2010).
28. A. Hulyanytskyi, A. Anikushyn, *Generalized solvability of parabolic integro-differential equations*, Differ. Equat., **50**, № 1, 98 – 109 (2014).
29. А. В. Анікушин, *Оптимальне керування інтегро-диференціальними системами параболічного типу*, Журн. обчисл. прикл. математики, № 3, 3 – 16 (2010).
30. Л. О. Костєєва, А. В. Анікушин, *Апріорні оцінки та узагальнена розв'язність початково-крайової задачі для одного інтегро-диференціального рівняння*, Журн. обчисл. прикл. математики, № 3, 2 – 14 (2018).
31. A. V. Anikushyn, *Generalized optimal control for systems described by linear integro-differential equations with nonnegative definite integral operators*, J. Autom. Inf. Sci., **46**, № 6, 58 – 67 (2014).
32. А. В. Анікушин, Х. М. Гранішак, А. Л. Гуляницький, Д. А. Номіровський, *Моделювання та оптимізація процесів, що описуються лінійними інтегро-диференціальними рівняннями*, Паперовий змій, Київ (2015).
33. J. Pruss, *Evolutionary integral equations and applications*, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel (2012).
34. Z. Feng, H. Li, Liu Yang, S. He, *An adaptive least-squares mixed finite element method for pseudo-parabolic integro-differential equations*, World Acad. Sci., Eng. Technol., № 60, 1718 – 1725 (2011).
35. F. Chen, *Fully-discrete H1-Galerkin mixed finite element method for pseudo-parabolic integro-differential equations*, J. Math. Comput. Sci., № 3, 631 – 640 (2013).
36. Hongbo Chen, Tianliang Hou, *A priori and a posteriori error estimates of H1-Galerkin mixed finite element methods for optimal control problems governed by pseudo-hyperbolic integro-differential equations*, Appl. Math. Comput., **328**, 100 – 112 (2018).
37. T. K. Yuldashev, *Mixed problem for pseudoparabolic integro-differential equation with degenerate kernel*, Differ. Equat., № 53, 99 – 108 (2017).
38. Huafei Di, Yadong Shang, *Global existence and nonexistence of solutions for the nonlinear pseudo-parabolic equation with a memory term*, Math. Methods Appl. Sci., **38**, № 17, 3923 – 3936 (2015).
39. І. А. Бондар, *Лінійні крайові задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром. Резонансний випадок для слабко збуреної крайової задачі*, Нелін. коливання, **25**, № 2-3, 174 – 183 (2022); **English translation:** J. Math. Sci. (N.Y.), **274**, 822 – 832 (2023).
40. О. А. Бойчук, І. А. Головацька, *Крайові задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь*, Нелін. коливання, **16**, № 4, 460 – 474 (2013); **English translation:** J. Math. Sci. (N.Y.), **203**, 306 – 321 (2014).
41. І. А. Бондар, Р. Ф. Овчар, *Біфуркація розв'язків крайової задачі для систем інтегро-диференціальних рівнянь з виродженим ядром*, Нелін. коливання, **20**, № 4, 465 – 476 (2017); **English translation:** J. Math. Sci. (N.Y.), **238**, 224 – 235 (2019).
42. A. A. Boichuk, A. M. Samoilenko, *Generalized inverse operators and Fredholm boundary-value problems*, De Gruyter, Berlin (2016).
43. О. А. Boichuk, O. Pokutnyi, *Solutions of the Schrödinger equation in a Hilbert space*, Bound. Value Probl., № 4 (2014).
44. Ю. М. Березанский, Г. Ф. Ус, З. Г. Шефтель, *Функциональный анализ*, Вища школа, Киев (1990).

Одержано 15.07.23,
після доопрацювання — 24.11.23