DOI: 10.3842/nosc.v26i4.1429

УДК 531.36; 531.011

МОМЕНТ КІЛЬКОСТЕЙ РУХУ ТА ОБМЕЖЕНІСТЬ РУХУ У ЗАДАЧІ ТРЬОХ ТІЛ

Степан Сосницький

Ін-т математики НАН України
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна
e-mail: e-mail: sosn@imath.kiev.ua

The influence of the angular momentum on the stabilization of motion in the three-body problem is considered. Sufficient conditions for boundedness of motion are obtained both in the restricted three-body problem and in its general case. The key role in these conditions is the role of angular momentum. Although in the spatial circular restricted three-body problem, the angular momentum is not an integral of motion but only a linear component of the Jacobi integral, it ensures the boundedness of motion of an infinitely small particle under certain additional conditions. A comparative analysis of the general and restricted three-body problems is carried out.

Розглянуто вплив моменту кількостей руху на стабілізацію руху в задачі трьох тіл. Отримано достатні умови обмеженості руху як в обмеженій задачі трьох тіл, так і в її загальному випадку. Ключовою за цих умов є роль моменту кількостей руху. Хоча в просторовій круговій обмеженій задачі трьох тіл момент кількостей руху не є інтегралом руху, а лише складовою частиною інтеграла Якобі, однак забезпечує обмеженість руху нескінченно малої частки за певних додаткових умов. Проведено порівняльний аналіз загальної і обмеженої задач трьох тіл.

1. Вступ. Простота формулювання задачі трьох тіл і разом із тим неможливість її розв'язання у повному обсязі стали викликом як для фахівців із царини природничих наук (астрономія, астрофізика і т. д.), так і математиків. Проте нині, зважаючи на час, у якому ми живемо, а саме, перш за все, маємо на увазі активне освоєння космічного простору, задача трьох тіл вже давно перестала бути чисто академічною, а перетворилася значною мірою й цілком обґрунтовано в прикладну. Комп'ютерне моделювання, аналітичні й числові методи, стимулом для розвитку яких певною мірою послужила і сама задача трьох тіл, дозволили досягти значних успіхів у її дослідженні [1 – 4]. При цьому аналітичний підхід, доповнюючи числові методи, сприяв глибшому розумінню останніх.

Розглянемо базові рівняння задачі трьох тіл, які запишемо у вигляді [5]:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}_1'' &= \mu_2 \frac{\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1}{|\boldsymbol{\rho}_{12}|^3} + \mu_3 \frac{\boldsymbol{\rho}_3 - \boldsymbol{\rho}_1}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|^3}, \\ \boldsymbol{\rho}_2'' &= -\mu_1 \frac{\boldsymbol{\rho}_2 - \boldsymbol{\rho}_1}{|\boldsymbol{\rho}_{12}|^3} + \mu_3 \frac{\boldsymbol{\rho}_3 - \boldsymbol{\rho}_2}{|\boldsymbol{\rho}_{23}|^3}, \qquad (1.1) \\ \boldsymbol{\rho}_3'' &= -\mu_1 \frac{\boldsymbol{\rho}_3 - \boldsymbol{\rho}_1}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|^3} - \mu_2 \frac{\boldsymbol{\rho}_3 - \boldsymbol{\rho}_2}{|\boldsymbol{\rho}_{23}|^3}, \end{aligned}$$

де штрих означає диференціювання по τ, $\tau = t\sqrt{GM}/r_0^{3/2}$, $\mu_i = m_i/M$, $M = m_1+m_2+m_3$, r_0 — параметр, що має розмірність одиниці довжини. В рівняннях (1.1) $\boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{r}_i/r_0$, $i = 1, 2, 3$, де $\mathbf{r}_i$ — радіуси-вектори точок у інерційній системі відліку з початком у центрі мас m_i. Параметр r_0 введений для того, щоб у подальшому оперувати безрозмірними величинами.

Якщо у рівняннях (1.1) покладемо $\mu_3 = 0$, то приходимо до обмеженої задачі трьох тіл

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}_1'' &= \mu \frac{\boldsymbol{\rho}_{12}}{|\boldsymbol{\rho}_{12}|^3}, \\ \boldsymbol{\rho}_2'' &= -(1-\mu) \frac{\boldsymbol{\rho}_{12}}{|\boldsymbol{\rho}_{12}|^3}, \\ \boldsymbol{\rho}_3'' &= -(1-\mu) \frac{\boldsymbol{\rho}_{13}}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|^3} - \mu \frac{\boldsymbol{\rho}_{23}}{|\boldsymbol{\rho}_{23}|^3}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

де

$$\mu = \frac{m_2}{m_1+m_2}, \quad 0 < \mu \le \frac{1}{2}.$$

Оскільки

$$\boldsymbol{\rho}_{13} = \frac{1}{\mu_1+\mu_2}(\boldsymbol{\rho}_3 + \mu_2\boldsymbol{\rho}_{12}), \qquad \boldsymbol{\rho}_{23} = \frac{1}{\mu_1+\mu_2}(\boldsymbol{\rho}_3 - \mu_1\boldsymbol{\rho}_{12})$$

і відповідно для обмеженої задачі

$$\boldsymbol{\rho}_{13} = (\boldsymbol{\rho}_3 + \mu\boldsymbol{\rho}_{12}), \qquad \boldsymbol{\rho}_{23} = [\boldsymbol{\rho}_3 - (1-\mu)\boldsymbol{\rho}_{12}],$$

то системи (1.1), (1.2) зручно записувати ще й у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}_{12}'' &= -(\mu_1+\mu_2)\frac{\boldsymbol{\rho}_{12}}{|\boldsymbol{\rho}_{12}|^3} + \mu_3\left(-\frac{\boldsymbol{\rho}_{13}}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|^3} + \frac{\boldsymbol{\rho}_{23}}{|\boldsymbol{\rho}_{23}|^3}\right), \\ \boldsymbol{\rho}_3'' &= -\mu_1 \frac{\boldsymbol{\rho}_{13}}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|^3} - \mu_2 \frac{\boldsymbol{\rho}_{23}}{|\boldsymbol{\rho}_{23}|^3}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}_{12}'' &= -\frac{\boldsymbol{\rho}_{12}}{|\boldsymbol{\rho}_{12}|^3}, \\ \boldsymbol{\rho}_3'' &= -(1-\mu)\frac{\boldsymbol{\rho}_{13}}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|^3} - \mu \frac{\boldsymbol{\rho}_{23}}{|\boldsymbol{\rho}_{23}|^3}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

2. Про ключові інтеграли руху у задачі трьох тіл. При якісному дослідженні руху у задачі трьох тіл ключову роль відіграють інтеграл енергії та векторний інтеграл моменту кількостей руху, а тому надалі саме їх істотно використовуватимемо. Зокрема, інтеграл енергії відповідно до систем рівнянь у вигляді (1.1) і (1.3) будемо записувати так:

$$\frac{1}{2}\sum_{i}^{3} \mu_i \boldsymbol{\rho}_i'^2 - \sum_{i<j} \frac{\mu_i\mu_j}{\rho_{ij}} = h = \text{const},$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\boldsymbol{\rho}_{12}'^2 + \frac{\mu_3}{\mu_1+\mu_2}\boldsymbol{\rho}_3'^2\right) - \sum_{i<j} \frac{\mu_i\mu_j}{\rho_{ij}} = h = \text{const}, \tag{2.1}$$

де $\rho_{ij} = |\boldsymbol{\rho}_{ij}|$, $i, j = 1, 2, 3$. Надалі обмежуватимемося випадком, коли $h < 0$.

Векторний інтеграл моменту кількостей руху крім звичного вигляду

$$\sum_{i}^{3} \mu_i \big(\boldsymbol{\rho}_i \times \boldsymbol{\rho}_i'\big) = \mathbf{C}$$

зображуватимемо ще й у вигляді [6]

$$\mu_1\mu_2\big(\boldsymbol{\rho}_{12} \times \boldsymbol{\rho}_{12}'\big) + \mu_3\big(\boldsymbol{\rho}_3 \times \boldsymbol{\rho}_3'\big) = \mathbf{C}, \tag{2.2}$$

що відповідає рівнянням руху у вигляді (1.3). Припускатимемо, що $\mathbf{C} \neq \mathbf{0}$.

Далі без обмеження загальності міркувань вважатимемо справедливою рівність

$$\sum_{i}^{3} \mu_i \boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}, \tag{2.3}$$

яка фіксує початок системи відліку у центрі мас матеріальних точок (тіл), що розглядаються. Її аналог у випадку обмеженої задачі трьох тіл має вигляд

$$(1-\mu)\boldsymbol{\rho}_1 + \mu\boldsymbol{\rho}_2 = \mathbf{0}. \tag{2.4}$$

Аналогом інтеграла енергії у обмеженій задачі трьох тіл за умови, що вона є круговою, є інтеграл Якобі

$$\frac{1}{2}{\boldsymbol{\rho}_3'}^2 - \big(\boldsymbol{\rho}_3 \times \boldsymbol{\rho}_3'\big)\big|_\zeta - \left(\frac{1-\mu}{\rho_{13}} + \frac{\mu}{\rho_{23}}\right) = h^*. \tag{2.5}$$

Тут вираз $(\boldsymbol{\rho}_3 \times \boldsymbol{\rho}_3')\,|_\zeta$ у лівій частині рівності (2.5) є проєкцією моменту кількостей руху малої частки $(\boldsymbol{\rho}_3 \times \boldsymbol{\rho}_3')$ на вісь $O\zeta$ інерційної системи відліку. Вісь $O\zeta$ перпендикулярна до площини, у якій рухаються два масивні тіла. Як бачимо, інтеграл Якобі являє собою суму енергії малої частки і проєкції її моменту кількостей руху на вісь $O\zeta$ і, таким чином, жодна зі складових інтеграла Якобі не є інтегралом руху. Однак, як переконаємося далі, це не усуває можливості стабілізуючої ролі моменту кількостей руху.

3. Про стабілізуючу роль моменту кількостей руху у круговій обмеженій задачі трьох тіл. Кругова обмежена задача трьох тіл (матеріальних точок), хоч і є доволі спрощеною моделлю руху трьох тіл у випадку, коли маса одного з них настільки мала порівняно з масами двох інших (які рухаються по кругових орбітах), що її впливом на них нехтують [7, 8], проте знаходить багато цікавих застосувань і нині [4, 7, 9 – 14].

Як показав Якобі, обмежена кругова задача допускає перший інтеграл (інтеграл Якобі), що в свою чергу дозволило Хіллу [15] довести існування обмежених рухів малої частки за умови, що стала рівня h інтеграла Якобі від'ємна і $|h|$ перевищує деяку критичну величину $\widetilde{h} > 0$. Далі цю умову зручно називати умовою Хілла. Якщо вона виконується, то область можливих рухів нескінченно малої частки є об'єднанням області ω_H обмежених рухів по координатах (області Хілла) і області ω_{nc} обмежених рухів по швидкостях, тобто $\omega = \omega_H \bigcup \omega_{nc}$, причому $\omega_H \bigcap \omega_{nc} = \varnothing$. На відміну від ω_H, область ω_{nc} не є обмеженою, однак рухи малої частки в цій області задовольняють умову дистальності, що надзвичайно важливо, коли мова іде про їхню обмеженість, принаймні у рамках запропонованого підходу.

Нагадаємо основні означення, якими користуватимемося далі.

Означення 1. *Рух* $\boldsymbol{\rho}(\tau) = (\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_3)^T$ *системи (1.1) назвемо стійким за Лагранжем, якщо виконується умова*

$$c_1 \le |\boldsymbol{\rho}_{ij}(\tau)| \le c_2 \quad \forall \tau \in R =]-\infty, \infty[\quad \forall i < j,$$

де $c_1,\ c_2$ *— додатні сталі.*

Означення 2. *Рух* $\boldsymbol{\rho}(\tau) = (\boldsymbol{\rho}_1, \boldsymbol{\rho}_2, \boldsymbol{\rho}_3)^T$ *системи (1.1) назвемо дистальним, якщо виконується нерівність*

$$|\boldsymbol{\rho}_{ij}(\tau)| \ge c_3 \quad \forall \tau \in R \quad \forall i < j, \quad 0 < c_3 = \mathrm{const}.$$

Означення 3. *Фіксовану пару точок* $(\mu_i, \mu_j),\ i < j,$ *системи (1.1) згідно з [16] назвемо стійкою за Хіллом, якщо виконується нерівність*

$$|\boldsymbol{\rho}_{ij}(\tau)| < c_4 \quad \forall \tau \in R, \quad 0 < c_4 = \mathrm{const}.$$

Систему рівнянь (1.4) віднесено до інерційної системи відліку з початком у центрі мас двох масивних тіл. Зокрема, припускаючи, що $O\xi,\ O\eta$ і $O\zeta$ — осі цієї системи координат, вважатимемо, що вісь $O\zeta$ перпендикулярна площині обертання двох масивних тіл.

Нехай у розглядуваній системі відліку $(\xi_1, \eta_1, 0)$ і $(\xi_2, \eta_2, 0)$ — координати тіл із масами $(1-\mu)$ і μ відповідно, а $\xi,\ \eta,\ \zeta$ — координати малої частки. Тоді друге векторне рівняння системи (1.4) можемо записати у вигляді

$$\begin{aligned} \xi'' &= -(1-\mu)\,\frac{\xi - \xi_1}{\rho_{13}^3} - \mu\,\frac{\xi - \xi_2}{\rho_{23}^3}, \\ \eta'' &= -(1-\mu)\,\frac{\eta - \eta_1}{\rho_{13}^3} - \mu\,\frac{\eta - \eta_2}{\rho_{23}^3}, \\ \zeta'' &= -(1-\mu)\,\frac{\zeta}{\rho_{13}^3} - \mu\,\frac{\zeta}{\rho_{23}^3}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

де

$$\begin{aligned} \rho_{13}^2 &= (\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 + \zeta^2, \\ \rho_{23}^2 &= (\xi - \xi_2)^2 + (\eta - \eta_2)^2 + \zeta^2. \end{aligned} \tag{3.2}$$

В інерційній системі відліку $(O\xi, \eta, \zeta)$ інтеграл Якобі набуває вигляду

$$\boldsymbol{\rho}_3'^{\,2} - 2\big(\xi\eta' - \eta\xi'\big) - 2\left(\frac{1-\mu}{\rho_{13}} + \frac{\mu}{\rho_{23}}\right) = 2h, \quad h = \mathrm{const}, \tag{3.3}$$

де $\boldsymbol{\rho}_3'^{\,2} = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2$. Якщо ж скористатися системою координат, яка обертається з одиничною кутовою швидкістю навколо осі, перпендикулярної до площини обертання двох масивних тіл, тобто коли

$$\begin{aligned} \xi &= x\cos\tau - y\sin\tau, \\ \eta &= x\sin\tau + y\cos\tau, \end{aligned}$$

де (x, y, z) — координати малої частки щодо системи координат, яка обертається, то інтеграл Якобі переходить у одну з рівностей

$$\boldsymbol{\rho}_3'^2 - 2\big(xy' - yx'\big) - 2\left(x^2 + y^2 + \frac{1-\mu}{\rho_{13}} + \frac{\mu}{\rho_{23}}\right) = 2h$$

або

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - \big(x^2 + y^2\big) - \frac{2(1-\mu)}{\rho_{13}} - \frac{2\mu}{\rho_{23}} = 2h. \tag{3.4}$$

У цьому випадку друге векторне рівняння системи (1.4) набуває вигляду [7]

$$x'' - 2y' = x - (1-\mu)\frac{x-\mu}{\rho_{13}^3} - \mu\,\frac{x+1-\mu}{\rho_{23}^3},$$

$$y'' + 2x' = y - (1-\mu)\frac{y}{\rho_{13}^3} - \mu\,\frac{y}{\rho_{23}^3},$$

$$z'' = -(1-\mu)\frac{z}{\rho_{13}^3} - \mu\,\frac{z}{\rho_{23}^3},$$

де

$$\boldsymbol{\rho}_{13}^2 = (x-\mu)^2 + y^2 + z^2, \qquad \boldsymbol{\rho}_{23}^2 = (x+1-\mu)^2 + y^2 + z^2.$$

Саме інтеграл Якобі у вигляді (3.4) використовував Хілл. Однак нам надалі зручніше скористатися інтегралом Якобі у формі (3.3).

Теорема 1. *Нехай рух нескінченно малої частки, що визначається рівняннями (1.4), є дистальним. Якщо, крім того, цей рух належить області*

$$\Omega = \left\{\big(\boldsymbol{\rho}_3, \boldsymbol{\rho}_3'\big) : \boldsymbol{\rho}_3'^2 - 2\big(\xi\eta' - \eta\xi'\big) - 2\left(\frac{1-\mu}{\rho_{13}} + \frac{\mu}{\rho_{23}}\right) = 2h,\ h < 0\right\},$$

то він є стійким за Лагранжем.

Доведення. Розглянемо функцію

$$V = \xi\xi' + \eta\eta'.$$

Її похідна по векторному полю, яке визначається рівняннями (3.1), має вигляд

$$V' = \xi'^2 + \eta'^2 - \xi\left[(1-\mu)\frac{\xi-\xi_1}{\rho_{13}^3} + \mu\,\frac{\xi-\xi_2}{\rho_{23}^3}\right] - \eta\left[(1-\mu)\frac{\eta-\eta_1}{\rho_{13}^3} + \mu\,\frac{\eta-\eta_2}{\rho_{23}^3}\right]. \tag{3.5}$$

Як випливає зі структури правої частини рівності (3.5), вона, враховуючи згідно з [17] обмеженість плоских координат ξ і η, при прямуванні відстаней ρ_{13} і ρ_{23} до нескінченності прямує до суми $\xi'^2 + \eta'^2$. Тепер, виходячи з того, що за умов теореми рух малої частки обмежений по координатах ξ і η, потрібно довести, що він обмежений по координаті ζ.

Припустимо супротивне, що координата ζ є необмеженою. Тоді, враховуючи рівності (3.2), робимо висновок, що необмеженими є обидві відстані ρ_{13} і ρ_{23}, тобто існує така послідовність $\{\tau_k\},\ k = 1, 2, 3, \ldots,$ що

$$\lim_{k\to\infty} \tau_k = \infty, \qquad \lim_{k\to\infty} \rho_{13}(\tau_k) = \infty, \qquad \lim_{k\to\infty} \rho_{23}(\tau_k) = \infty. \tag{3.6}$$

На підставі інтеграла Якобі у вигляді (3.3) маємо нерівність

$$(\xi\eta' - \eta\xi') \geq -h - \left(\frac{1-\mu}{\rho_{13}} + \frac{\mu}{\rho_{23}}\right),$$

яку, враховуючи справедливість нерівності

$$(\xi\eta' - \eta\xi') \leq \sqrt{\xi^2 + \eta^2}\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}, \tag{3.7}$$

перепишемо у вигляді

$$\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2} \geq \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}\left[-h - \left(\frac{1-\mu}{\rho_{13}} + \frac{\mu}{\rho_{23}}\right)\right]. \tag{3.8}$$

На елементах послідовності $\{\tau_k\}$, враховуючи (3.6), належність вектора $(\boldsymbol{\rho}_3, \boldsymbol{\rho}'_3)$ області Ω і обмеженість суми $\xi^2 + \eta^2$, як граничний варіант нерівності (3.8) отримуємо

$$\left\{\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}\right\}_\infty \geq \frac{|h|}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$$

і, таким чином, як границю для V' маємо

$$\{V'\}_\infty = \xi'^2 + \eta'^2 > \lambda > 0, \quad \lambda = \text{const}.$$

Отже на підставі неперервності правої частини рівності (3.5) можемо стверджувати, що в послідовності $\{\tau_k\}$ існує такий достатньо великий номер s, що при $k \geq s$ справджується нерівність

$$V' \,|_{\tau\in\{\tau_k\}} \geq \delta \quad \forall k \geq s, \quad 0 < \delta = \text{const}, \quad \delta < \lambda. \tag{3.9}$$

Згідно з умовами теореми 1 розглядуваний рух є дистальним і, як наслідок, швидкість малої частки обмежена. Це дає підстави прийти до висновку, що існує послідовність проміжків часу зростаючої довжини

$$\{T_j\} = [\tau_{s+j} - \tau_{n_j}], \quad \tau_{s+j} \in \{\tau_k\}, \quad j = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$\tau_{n_j} < \tau_{s+j}, \quad n_1 < n_2 < n_3 \ldots,$$

на яких виконується нерівність

$$V' \geq \delta \quad \forall \tau \in \{T_j\}. \tag{3.10}$$

Зауважимо, що саме обмеженість швидкості малої частки дозволяє від нерівності (3.9), справедливої для послідовності точок, перейти до нерівності (3.10), яка виконується для послідовності часових відрізків, довжина яких зростає.

Інтегруючи (3.10), отримуємо нерівність

$$V \,|_{\tau_1}^{\tau} \geq \delta(\tau - \tau_1), \quad \tau > \tau_1, \quad [\tau_1, \tau] \subseteq \{T_j\},$$

яку, покладаючи в ній $\tau_1 = \tau_{n_j}$, $\tau = \tau_{s+j}$, переписуємо у вигляді

$$V \,|_{\tau=\tau_{s+j}} - V \,|_{\tau_1=\tau_{n_j}} \geq \delta(\tau_{s+j} - \tau_{n_j}). \tag{3.11}$$

Величини τ_{n_j} в нерівності (3.11) завжди відповідають таким скінченним моментам часу, що відстані ρ_{13} і ρ_{23} досягають у них критичних значень, при яких забезпечується виконання нерівності (3.10). Таким чином, довжина проміжку часу $[\tau_{s+j} - \tau_{n_j}]$ при $j \to \infty$ відповідно до (3.6) прямує до нескінченності. Отже, права частина нерівності (3.11) також прямує до нескінченності. Оскільки ліва частина нерівності (3.11) внаслідок обмеженості (ξ, η) і (ξ', η') обмежена, то отримуємо суперечність, звідки випливає справедливість теореми 1.

Зауваження. Нагадаємо, що згідно з умовою Хілла стала рівня h інтеграла Якобі повинна бути від'ємною і $|h| > \widetilde{h} > 0$, де $\widetilde{h}$ — деяка критична стала. У випадку теореми 1 стала h лише від'ємна. Таким чином, згідно з теоремою 1 обмеженість руху має місце навіть тоді, коли умова Хілла не виконується. Одним із прикладів таких рухів є, зокрема, трикутні рухи Лагранжа, коли два масивні тіла і мала частка утворюють рівносторонній трикутник.

4. Про стабілізуючу роль моменту кількостей руху в еліптичній обмеженій задачі трьох тіл. Як ми вже переконалися, для доведення теореми 1 ключовою обставиною було існування інтеграла Якобі. Останній, а точніше його складова, що є проєкцією моменту кількостей руху малої частки $(\boldsymbol{\rho}_3 \times \boldsymbol{\rho}_3')$ на вісь $O\zeta$, перпендикулярну до площини, у якій рухаються два масивні тіла, забезпечили оцінку (3.8). При цьому, як вже зазначалося вище, сам момент кількостей руху не є інтегралом руху. У цьому зв'язку, беручи до уваги, що еліптична обмежена задача трьох тіл взагалі не допускає інтегралів руху, виникає питання, чи може все таки момент кількостей руху малої частки виконувати стабілізуючу функцію в еліптичній обмеженій задачі. Принаймні така постановка задачі має сенс, коли за малу частку виступає космічний апарат. Виявляється, що відповідь на це питання позитивна.

Теорема 2. *Нехай $\boldsymbol{\rho}(\tau) = (\boldsymbol{\rho}_{12}, \boldsymbol{\rho}_3)^T$ — дистальний рух системи (1.4). Тоді, якщо проєкція моменту кількостей руху малої частки*

$$\mathbf{M}_3 = \boldsymbol{\rho}_3 \times \boldsymbol{\rho}_3'$$

на вісь $O\zeta$, перпендикулярну площині обертання двох масивних тіл, задовольняє нерівність

$$\mathbf{M}_3|_{O\zeta} \geq \lambda, \quad 0 < \lambda = \mathrm{const}, \tag{4.1}$$

то розглядуваний рух стійкий за Лагранжем.

Доведення. Як уже зазначалося вище, систему рівнянь (1.4) віднесено до інерційної системи відліку з початком у центрі мас тіл, що притягуються. Згідно з вибором системи відліку і умовою (4.1) теореми 2 маємо нерівність

$$\mathbf{M}_3|_{O\zeta} = \left(\xi\eta' - \eta\xi'\right) \geq \lambda, \quad 0 < \lambda = \mathrm{const}.$$

Враховуючи справедливість нерівності (3.7) і, як наслідок, оцінки

$$\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2} \geq \frac{\lambda}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}},$$

далі можемо скористатися схемою доведення теореми 1 і прийти до висновку про справедливість теореми 2.

Як бачимо, хоча момент кількостей руху малої частки і не є інтегралом руху, однак відіграє стабілізуючу роль. Цікавим є те, що стійкість за Лагранжем малої частки у цьому випадку має місце незалежно від співвідношення мас m_1 і m_2 (порівн. з [18]).

5. Про стабілізуючу роль моменту кількостей руху у загальному випадку задачі трьох тіл. Якщо інтеграл моменту кількостей руху розглядати у вигляді (2.2), то очевидними є такі можливі сценарії руху:

1) превалює момент кількостей руху третього тіла;

2) превалює момент кількостей руху стійкої за Хіллом пари (μ_1, μ_2);

3) не існує превалюючої складової у рівності (2.2).

Перший сценарій можливий у випадку, коли маса μ_3 третього тіла значно перевершує маси стійкої за Хіллом пари (μ_1, μ_2). Навпаки, другий випадок можливий тоді, коли маса μ_3 третього тіла надто мала, щоб істотно впливати на рух стійкої за Хіллом пари (μ_1, μ_2). Зупинимося далі на цих двох сценаріях як найпростіших.

Зрозуміло, що коли виконується перший сценарій, то є всі підстави скористатися схемою, яку вже застосовували вище в обмеженій задачі.

Теорема 3. *Нехай* $\boldsymbol{\rho}(\tau) = (\boldsymbol{\rho}_{12}, \boldsymbol{\rho}_3)^T$ *— дистальний рух системи (1.3), що належить множині*

$$\Omega = \big\{(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') : T - U = h < 0\big\}$$

і, крім того, пара матеріальних точок (μ_1, μ_2), *яка відповідає цьому руху, стійка за Хіллом.*

Тоді, якщо існує сталий вектор $\mathbf{l}$ *з початком у центрі мас такий, що проєкція вектора*

$$\mathbf{M}_3 = \boldsymbol{\rho}_3 \times \boldsymbol{\rho}_3'$$

на нього задовольняє нерівність

$$\mathbf{M}_3|_{\mathbf{l}} \geq \lambda, \quad 0 < \lambda = \mathrm{const}, \tag{5.1}$$

то розглядуваний рух стійкий за Лагранжем.

Доведення. Як уже зазначалося вище, системи рівнянь (1.1), (1.3) віднесено до інерційної системи відліку з початком у центрі мас тіл, що притягуються. Зокрема, вважаючи, що $O\xi$, $O\eta$ і $O\zeta$ — осі цієї системи координат, виберемо вісь $O\zeta$ таким чином, що вона збігається з напрямком $\mathbf{l}$. Площину $\xi O\eta$ виберемо перпендикулярною до осі $O\zeta$. Згідно з вибором системи відліку і умовою (5.1) теореми 3 маємо нерівність

$$\mathbf{M}_3|_\zeta = \big(\xi_3\eta_3' - \eta_3\xi_3'\big) \geq \lambda, \quad 0 < \lambda = \mathrm{const}. \tag{5.2}$$

Враховуючи справедливість нерівності

$$\big(\xi_3\eta_3' - \eta_3\xi_3'\big) \leq \sqrt{\xi_3^2 + \eta_3^2}\sqrt{\xi_3'^2 + \eta_3'^2},$$

на підставі (5.2) маємо

$$\sqrt{\xi_3'^2 + \eta_3'^2} \geq \frac{\lambda}{\sqrt{\xi_3^2 + \eta_3^2}}. \tag{5.3}$$

За умов теореми 3 відповідно до леми і теореми з [19] рух третього тіла обмежений щодо пари координат (ξ_3, η_3). Таким чином, згідно з (5.3) отримуємо

$$\sqrt{\xi_3'^2 + \eta_3'^2} \geq \gamma, \quad 0 < \gamma = \mathrm{const}.$$

Розглянемо друге векторне рівняння системи (1.3), яке запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}
\xi_3'' &= -\mu_1 \frac{\xi_3 - \xi_1}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|^3} - \mu_2 \frac{\xi_3 - \xi_2}{|\boldsymbol{\rho}_{23}|^3}, \\
\eta_3'' &= -\mu_1 \frac{\eta_3 - \eta_1}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|^3} - \mu_2 \frac{\eta_3 - \eta_2}{|\boldsymbol{\rho}_{23}|^3}, \\
\zeta_3'' &= -\mu_1 \frac{\zeta_3 - \zeta_1}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|^3} - \mu_2 \frac{\zeta_3 - \zeta_2}{|\boldsymbol{\rho}_{23}|^3}.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Розглянемо функцію

$$V = \xi_3 \xi_3' + \eta_3 \eta_3'.$$

Її похідна по векторному полю, визначеному рівняннями (5.4), має вигляд

$$V' = \xi_3'^2 + \eta_3'^2 - \xi_3 \left[\mu_1 \frac{\xi_3 - \xi_1}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|^3} + \mu_2 \frac{\xi_3 - \xi_2}{|\boldsymbol{\rho}_{23}|^3} \right] - \eta_3 \left[\mu_1 \frac{\eta_3 - \eta_1}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|^3} + \mu_2 \frac{\eta_3 - \eta_2}{|\boldsymbol{\rho}_{23}|^3} \right].$$

Використовуючи далі схему доведення теореми 1, переконуємося у справедливості теореми 3.

Теорема 4. *Нехай* $\boldsymbol{\rho}(\tau) = (\boldsymbol{\rho}_{12}, \boldsymbol{\rho}_3)^T$ *— рух системи (1.3), що належить множині*

$$\Omega = \big\{ (\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') : T - U = h < 0 \big\}.$$

Тоді, якщо пара матеріальних точок (μ_1, μ_2), *яка відповідає цьому руху, стійка за Хіллом, причому справедливі нерівності*

$$\big| \boldsymbol{\rho}_{12} \times \boldsymbol{\rho}_{12}' \big| \geq c, \quad 0 < c = \text{const},$$

$$\mu_1 \mu_2 (\mu_1 + \mu_2) + 2c^2 h \leq 0,$$

то розглядуваний рух стійкий за Лагранжем.

Доведення. Представимо інтеграл енергії (2.1) для досліджуваного руху у вигляді

$$\left[\frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \left(\rho_{12}'^2 + \frac{|\boldsymbol{\rho}_{12} \times \boldsymbol{\rho}_{12}'|^2}{\rho_{12}^2} \right) - \frac{2}{\rho_{12}} \right] \\
+ \frac{1}{\mu_1 \mu_2} \left(\frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_2} \boldsymbol{\rho}_3'^2 - 2 \frac{\mu_1 \mu_3}{\rho_{13}} - 2 \frac{\mu_2 \mu_3}{\rho_{23}} \right) = \frac{2h}{\mu_1 \mu_2}.$$

Далі розглядатимемо його як квадратне рівняння стосовно $1/\rho_{12}$:

$$\frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \left(\frac{|\boldsymbol{\rho}_{12} \times \boldsymbol{\rho}_{12}'|^2}{\rho_{12}^2} \right) - \frac{2}{\rho_{12}} \\
+ \left[\frac{1}{\mu_1 + \mu_2} \rho_{12}'^2 + \frac{1}{\mu_1 \mu_2} \left(\frac{\mu_3}{\mu_1 + \mu_2} \boldsymbol{\rho}_3'^2 - 2 \frac{\mu_1 \mu_3}{\rho_{13}} - 2 \frac{\mu_2 \mu_3}{\rho_{23}} - 2h \right) \right] = 0. \tag{5.5}$$

На підставі (5.5) маємо

$$\frac{1}{\rho_{12}} = \frac{(\mu_1+\mu_2)}{c^2(\tau)} \times \left\{1 \pm \sqrt{1 - \frac{c^2(\tau)}{\mu_1+\mu_2}\left[\frac{\rho_{12}'^2}{\mu_1+\mu_2} + \frac{1}{\mu_1\mu_2}\left(\frac{\mu_3\boldsymbol{\rho}_3'^2}{\mu_1+\mu_2} - 2\,\frac{\mu_1\mu_3}{\rho_{13}} - 2\,\frac{\mu_2\mu_3}{\rho_{23}} - 2h\right)\right]}\right\}, \tag{5.6}$$

де

$$c^2(\tau) = \left|\boldsymbol{\rho}_{12} \times \boldsymbol{\rho}_{12}'\right|^2.$$

Рівність (5.6) далі подамо у вигляді

$$\frac{1}{\rho_{12}} - \frac{(\mu_1+\mu_2)}{c^2(\tau)} = \pm\frac{(\mu_1+\mu_2)}{c^2(\tau)}\sqrt{1 - \frac{c^2(\tau)}{\mu_1+\mu_2}\left[\frac{\rho_{12}'^2}{\mu_1+\mu_2} + \frac{1}{\mu_1\mu_2}\left(\frac{\mu_3\boldsymbol{\rho}_3'^2}{\mu_1+\mu_2} - 2\,\frac{\mu_1\mu_3}{\rho_{13}} - 2\,\frac{\mu_2\mu_3}{\rho_{23}} - 2h\right)\right]}. \tag{5.7}$$

Здійснимо тепер деякі перетворення над виразом під знаком радикала. В результаті отримуємо

$$1 - \frac{c^2(\tau)}{\mu_1+\mu_2}[\ldots] = \frac{\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2) + 2c^2(\tau)h}{\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2)} - \frac{c^2(\tau)}{\mu_1+\mu_2}\left[\frac{\rho_{12}'^2}{\mu_1+\mu_2} + \frac{1}{\mu_1\mu_2}\left(\frac{\mu_3\boldsymbol{\rho}_3'^2}{\mu_1+\mu_2} - 2\,\frac{\mu_1\mu_3}{\rho_{13}} - 2\,\frac{\mu_2\mu_3}{\rho_{23}}\right)\right]. \tag{5.8}$$

За умов теореми 4 виконується нерівність

$$\frac{\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2) + 2c^2(\tau)h}{\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2)} \le 0.$$

Припустимо тепер, що при виконанні умов теореми 4 досліджуваний рух $\boldsymbol{\rho}(\tau) = \left((\boldsymbol{\rho}_{12}, \boldsymbol{\rho}_3)^T\right)$ не є обмеженим. Тоді існує така послідовність $\{\tau_k\},\ k = 1, 2, 3, \ldots,$ що

$$\lim_{k\to\infty} \tau_k = \infty, \qquad \lim_{k\to\infty} \rho_3(\tau_k) = \infty, \qquad \rho_3(\tau_k) = |\boldsymbol{\rho}_3(\tau_k)|. \tag{5.9}$$

Розглянемо спочатку випадок, коли

$$\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2) + 2c^2(\tau)h \le \mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2) + 2c^2h < 0.$$

Тоді відповідно до (5.9) існує таке достатньо велике число $k,$ що величини $1/\rho_{13}(\tau_k)$ і $1/\rho_{23}(\tau_k)$ стають як завгодно малими і, як наслідок, права частина рівності (5.7) з урахуванням (5.8) стає уявною. Отримуємо суперечність.

Нехай тепер

$$\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2) + 2c^2(\tau)h \le 0.$$

Тоді, якщо припустити необмеженість руху за умов цієї нерівності, то виконується (5.9) і, як наслідок, $\rho_{12}(\tau_k)$ відповідно до рівнянь (1.3) при $k \to \infty$ наближається до еліптичного кеплерівського руху, і, таким чином, справедлива рівність

$$\rho_{12}'^2 = \frac{e^2}{\widetilde{c}^2} \sin^2 f,$$

де стала e відповідає ексцентриситету еліптичної орбіти, $\widetilde{c}^2$ — граничне значення $c^2(\tau)$, f — істинна аномалія.

Оскільки на елементах послідовності $\{\tau_k\}$ при $k \to \infty$

$$\frac{1}{\rho_{13}(\tau_k)} \to 0, \qquad \frac{1}{\rho_{23}(\tau_k)} \to 0, \tag{5.10}$$

то для граничного виразу суми членів під знаком радикала отримуємо нерівність

$$\begin{aligned} &\left\{\frac{\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2)+2c^2(\tau)h}{\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2)} - \frac{c^2(\tau)}{\mu_1+\mu_2}\right. \\ &\qquad \left.\times\left[\frac{\rho_{12}'^2}{\mu_1+\mu_2} + \frac{1}{\mu_1\mu_2}\left(\frac{\mu_3\boldsymbol{\rho}_3'^2}{\mu_1+\mu_2} - 2\,\frac{\mu_1\mu_3}{\rho_{13}} - 2\,\frac{\mu_2\mu_3}{\rho_{23}}\right)\right]\right\}_\infty \\ &\qquad \le -\frac{c^2(\tau)}{\mu_1+\mu_2}\left[\frac{1}{\mu_1+\mu_2}\,\frac{e^2}{\widetilde{c}^2}\sin^2 f + \frac{1}{\mu_1\mu_2}\left(\frac{\mu_3\boldsymbol{\rho}_3'^2}{\mu_1+\mu_2}\right)\right]. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Розглянемо більш детально нерівність (5.11). Функція $\sin^2 f$, яка входить у її праву частину, рівна одиниці при $f = (2i+1)\pi/2,\ i = 0,1,2,\ldots,$ а оскільки ми досліджуємо рухи, що належать множині Ω, то права частина нерівності (5.11) стає від'ємною, коли $\sin^2 f = 1$.

Згідно з умовами теореми 4 пара матеріальних точок (μ_1, μ_2) стійка за Хіллом, а розглядуваний рух є дистальним, що обумовлює обмеженість швидкостей матеріальних точок системи (1.3). Період еліптичного кеплерівського руху, до якого наближається $\rho_{12}(\tau_k)$ при $k \to \infty$, також обмежений. У його межах $\sin^2 f$ як неперервна функція набуває всіх своїх значень. Таким чином, беручи до уваги (5.10) і (5.11), отримуємо всі підстави стверджувати, що існує таке значення $\tau^*(k)$, при якому вираз

$$\begin{aligned} &\left\{\frac{\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2)+2c^2(\tau)h}{\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2)}\right. \\ &\qquad \left.\left. - \frac{c^2(\tau)}{\mu_1+\mu_2}\left[\frac{\rho_{12}'^2}{\mu_1+\mu_2} + \frac{1}{\mu_1\mu_2}\left(\frac{\mu_3\boldsymbol{\rho}_3'^2}{\mu_1+\mu_2} - 2\,\frac{\mu_1\mu_3}{\rho_{13}} - 2\,\frac{\mu_2\mu_3}{\rho_{23}}\right)\right]\right\}\right|_{\tau=\tau^*(k)} \end{aligned}$$

стає від'ємним і, як наслідок, права частина рівності (5.7) стає уявним числом. З іншого боку, за умов теореми 4 ліва частина рівності (5.7) завжди дійсна. Приходимо до суперечності, звідки робимо висновок про справедливість теореми 4.

Отримані теореми 3 і 4 є відображенням того факту, що превалювання однієї складової щодо іншої у виразі інтеграла моменту кількостей руху (2.2) може слугувати вагомим елементом ресурсу для забезпечення стійкості за Лагранжем.

6. Порівняльний аналіз загальної і обмеженої задач трьох тіл. ***6.1.*** Почнемо з інваріантних співвідношень відповідно для систем (1.1) і (1.2), що мають місце для будь-якої барицентричної системи координат. Для загальної задачі трьох тіл це рівність (2.3), для обмеженої задачі — (2.4). На перший погляд відмінність між цими співвідношеннями є істотною, оскільки в рівності (2.4) відсутній радіус-вектор третьої матеріальної точки. Крім того, у типовому випадку, коли розглядається обмежена кругова задача або еліптична, абсолютні величини $|\boldsymbol{\rho}_1|$ і $|\boldsymbol{\rho}_2|$ завжди обмежені, незалежно від того, якою є $|\boldsymbol{\rho}_3|$, що зовсім не так у загальній задачі. Однак не становить жодних труднощів знайти такий вигляд запису інваріантних співвідношень (2.3) і (2.4), який стає однаковим як для системи (1.1), так і для системи (1.2). Безпосередньою перевіркою легко переконатися, що це є рівність

$$\mu_1\boldsymbol{\rho}_{13} + \mu_2\boldsymbol{\rho}_{23} - \boldsymbol{\rho}_3 = \mathbf{0}. \tag{6.1}$$

Більш того, легко переконатися в тому, що ця рівність є носієм тотожної інформації як для загальної задачі трьох тіл, так і для обмеженої, коли мова йде про такі важливі параметри руху як обмеженість (необмеженість) руху. Зокрема, коли абсолютна величина $|\boldsymbol{\rho}_3|$ обмежена, то обмеженим є рух як системи (1.1), так і системи (1.2) і навпаки. Для обмеженої задачі трьох тіл це очевидно, виходячи з того, що центр мас системи належить обмеженій парі тіл (μ_1, μ_2). Для загального випадку задачі трьох тіл це випливає з того факту, що оскільки, як зазначалося вище, розглядається випадок, коли $h < 0$, то у будь-який момент часу одна з відстаней між тілами завжди є обмеженою.

На підставі (6.1) отримуємо важливі рівності, які зв'язують квадрат відстані третього тіла від центра мас і взаємні відстані між тілами

$$\rho_3^2 = -(1-\mu)\mu\rho_{12}^2 + (1-\mu)\rho_{13}^2 + \mu\rho_{23}^2,$$

$$\rho_3^2 = -\mu_1\mu_2\rho_{12}^2 + \mu_1(\mu_1+\mu_2)\rho_{13}^2 + \mu_2(\mu_1+\mu_2)\rho_{23}^2$$

відповідно для обмеженої і загальної задач трьох тіл.

6.2. Хоча при $h < 0$ у задачі трьох тіл одна з взаємних відстаней $|\boldsymbol{\rho}_{ij}(\tau)|$ обмежена, проте заздалегідь не відомо, чи в процесі еволюції системи залишатиметься обмеженою одна й та ж взаємна відстань. Адже під час руху системи найменшими по черзі можуть ставати різні взаємні відстані, і це створює певні проблеми при дослідженні умов обмеженості руху. На жаль, цей факт було усвідомлено не одразу. Знадобився досить тривалий час, щоб стало зрозумілим, наскільки важливо знати, чи в процесі руху обмежена фіксована відстань існує взагалі, а якщо існує, то як знайти умови, які б дозволили зафіксувати пару матеріальних точок із обмеженою відстанню між ними у процесі еволюції системи. Так поступово формувалося поняття стійкої за Хіллом пари матеріальних точок або стійкість типу Хілла та пропонувалися відповідні критерії стійкості [2, 16, 20 – 24]. При цьому ключова роль для формування початкових умов, які б забезпечували стійкість за Хіллом пари матеріальних точок, належала інтегралам енергії та моменту кількостей руху.

Не можна оминути увагою і того факту, що стійка за Хіллом пара завжди є в обмеженій задачі трьох тіл, принаймні у випадку кругової або еліптичної задачі, що випливає з самого способу їхнього формування. А тому деякою мірою можемо стверджувати, що корені поняття стійкої за Хіллом пари фактично сягають обмеженої задачі, коли наявність фіксованої пари тіл із обмеженою відстанню між ними передбачено самою постановкою обмеженої задачі. Таким чином, хоч обмежена задача і є окремим випадком загальної задачі трьох тіл, однак вона може бути джерелом більш широких у сенсі застосування понять.

З викладеного вище стає зрозумілим, чому обмежена задача трьох тіл має багато застосувань. Адже для успішного застосування моделі загальної задачі трьох тіл дуже важливим, але достатньо трудомістким етапом є встановлення стійкої за Хіллом пари тіл, яка слугує вагомою опорною сходинкою для подальшого якісного дослідження руху. Разом із тим в обмеженій задачі стійка за Хіллом пара існує автоматично. І хоча в обмеженій задачі, зокрема, еліптичній ми позбуваємося ключових інтегралів руху, проте в загальній задачі саме ці ключові інтеграли ми часто використовуємо для фіксації початкових умов таким чином, щоб фактично наблизити загальну задачу до обмеженої. Отже, як бачимо, і обмежена, і загальна задачі трьох тіл тісно пов'язані між собою, що потребує вмілого їхнього поєднання в процесі дослідження руху трьох тіл. І це дійсно відбувається на практиці. Так, зокрема, в рамках програми освоєння космічного простору зазвичай такі системи як Земля – Місяць — космічний апарат, Сонце – Земля – Місяць, Сонце – Юпітер — астероїд і т. д. розглядають як обмежені задачі трьох тіл, оскільки в кожній з цих систем маса третього тіла набагато менша, ніж кожного з двох перших тіл, і нею нехтують у відповідних рівняннях руху.

Оскільки обмежена задача має меншу розмірність у порівнянні із загальною, то кількісні результати простіше отримати, виходячи саме з неї, як більш простої у математичному сенсі, використовуючи для цього комп'ютерне моделювання. Однак на підставі останнього не завжди можна прийти до правильних якісних результатів, коли мова йде про необмежені інтервали часу. В реальній ситуації, якою б малою не була маса третього тіла, вона все одно відмінна від нуля, і фактично ми маємо справу з загальним випадком задачі трьох тіл, а тому, коли є необхідний ресурс для якісного дослідження в рамках загальної задачі трьох тіл, тоді цим ресурсом як більш повним джерелом інформації не варто нехтувати. У цьому сенсі загальна задача трьох тіл може виконувати контрольну функцію стосовно обмеженої задачі і, маючи цю можливість контролю, можна більш упевнено проводити дослідження у рамках моделі обмеженої задачі, використовуючи при цьому як аналітичні, так і чисельні методи.

6.3. Важливим елементом дослідження руху у задачі трьох тіл є рівняння відстаней [5]:

$$\begin{aligned}
{\rho_{12}^2}'' &= 2v_{12}^2 - 2\,\frac{\mu_1+\mu_2}{\rho_{12}} + \frac{\mu_3}{\rho_{13}}\left(\frac{\rho_{23}^2-\rho_{12}^2}{\rho_{13}^2}-1\right) + \frac{\mu_3}{\rho_{23}}\left(\frac{\rho_{13}^2-\rho_{12}^2}{\rho_{23}^2}-1\right),\\
{\rho_{13}^2}'' &= 2v_{13}^2 - 2\,\frac{\mu_1+\mu_3}{\rho_{13}} + \frac{\mu_2}{\rho_{12}}\left(\frac{\rho_{23}^2-\rho_{13}^2}{\rho_{12}^2}-1\right) + \frac{\mu_2}{\rho_{23}}\left(\frac{\rho_{12}^2-\rho_{13}^2}{\rho_{23}^2}-1\right),\\
{\rho_{23}^2}'' &= 2v_{23}^2 - 2\,\frac{\mu_2+\mu_3}{\rho_{23}} + \frac{\mu_1}{\rho_{12}}\left(\frac{\rho_{13}^2-\rho_{23}^2}{\rho_{12}^2}-1\right) + \frac{\mu_1}{\rho_{13}}\left(\frac{\rho_{12}^2-\rho_{23}^2}{\rho_{13}^2}-1\right),\\
E_{12}' &= \mu_3\left[{\rho_{12}^2}'\left(\frac{1}{\rho_{12}^3}-\frac{1}{\rho_{13}^3}\right) + {\rho_{23}^2}'\left(\frac{1}{\rho_{13}^3}-\frac{1}{\rho_{23}^3}\right) + 2\boldsymbol{\rho}_{23}\boldsymbol{\rho}_{13}'\left(\frac{1}{\rho_{23}^3}-\frac{1}{\rho_{13}^3}\right)\right], \qquad (6.2)\\
E_{13}' &= -\mu_2\left[{\rho_{13}^2}'\left(\frac{1}{\rho_{12}^3}-\frac{1}{\rho_{13}^3}\right) + 2\boldsymbol{\rho}_{23}\boldsymbol{\rho}_{13}'\left(\frac{1}{\rho_{23}^3}-\frac{1}{\rho_{12}^3}\right)\right],\\
E_{23}' &= \mu_1\left[{\rho_{23}^2}'\left(\frac{1}{\rho_{23}^3}-\frac{1}{\rho_{12}^3}\right) + 2(\boldsymbol{\rho}_{13}\boldsymbol{\rho}_{23})'\left(\frac{1}{\rho_{12}^3}-\frac{1}{\rho_{13}^3}\right) - 2\boldsymbol{\rho}_{23}\boldsymbol{\rho}_{13}'\left(\frac{1}{\rho_{12}^3}-\frac{1}{\rho_{13}^3}\right)\right],
\end{aligned}$$

$$(\boldsymbol{\rho}_{23}\boldsymbol{\rho}_{13}')' = \frac{1}{2}\left(-v_{12}^2 + v_{13}^2 + v_{23}^2\right)$$

$$- \frac{\mu_1 + \mu_3}{2\rho_{13}} \left(1 + \frac{\rho_{23}^2 - \rho_{12}^2}{\rho_{13}^2} \right) + \frac{\mu_2}{2\rho_{12}} \left(1 + \frac{\rho_{23}^2 - \rho_{13}^2}{\rho_{12}^2} \right) - \frac{\mu_2}{\rho_{23}},$$

де $\rho_{ij} = |\boldsymbol{\rho}_{ij}|,\ v_{ij} = |\boldsymbol{\rho}'_{ij}|,\ E_{ij} = v_{ij} - 2/\rho_{ij},\ i < j,\ i, j = 1, 2, 3.$ Тут, як і в рівняннях (1.1) і (1.3), штрих означає диференціювання за безрозмірним часом τ. Крім того, систему рівнянь (6.2) також віднесено до інерційної системи відліку. Саме цей вигляд рівнянь руху дозволив нам отримати важливі теореми, що стосуються якісних характеристик досліджуваних рухів.

Інтеграл енергії для рівнянь (6.2) набуває вигляду

$$\mu_1\mu_2 E_{12} + \mu_1\mu_3 E_{13} + \mu_2\mu_3 E_{23} = 2h.$$

Відповідним аналогом для обмеженої задачі є рівняння

$$\begin{aligned}
{\rho_{12}^2}'' &= 2\left(v_{12}^2 - \frac{1}{\rho_{12}}\right),\\
{\rho_{13}^2}'' &= 2v_{13}^2 - \frac{\mu}{\rho_{12}} + \mu\,\frac{\left(\rho_{23}^2 - \rho_{13}^2\right)}{\rho_{12}^3} - 2\,\frac{(1-\mu)}{\rho_{13}} - 2\mu\,\frac{\boldsymbol{\rho}_{13}\boldsymbol{\rho}_{23}}{\rho_{23}^3},\\
{\rho_{23}^2}'' &= 2v_{23}^2 - \frac{(1-\mu)}{\rho_{12}} - (1-\mu)\frac{\left(\rho_{23}^2 - \rho_{13}^2\right)}{\rho_{12}^3} - 2\,\frac{\mu}{\rho_{23}} - 2(1-\mu)\,\frac{\boldsymbol{\rho}_{13}\boldsymbol{\rho}_{23}}{\rho_{13}^3},\\
{E_{13}}' &= -\mu\Bigg[\left(\frac{2}{\rho_{13}} - \frac{2}{\rho_{23}}\right)' + 2y\left(\frac{1}{\rho_{12}^3} - \frac{1}{\rho_{23}^3}\right)\\
&\qquad + \frac{\left(\rho_{13}^2 - \rho_{23}^2\right)'}{\rho_{12}^3} - 2(1-\mu)\left(\frac{1}{\rho_{12}}\right)' - (1-\mu)\frac{\left(\rho_{12}^2\right)'}{\rho_{23}^3}\Bigg],\\
{E_{23}}' &= (1-\mu)\Bigg[\left(\frac{2}{\rho_{13}} - \frac{2}{\rho_{23}}\right)' + 2y\left(\frac{1}{\rho_{12}^3} - \frac{1}{\rho_{13}^3}\right)\\
&\qquad + \frac{\left(\rho_{13}^2 - \rho_{23}^2\right)'}{\rho_{12}^3} + 2\mu\left(\frac{1}{\rho_{12}}\right)' + \mu\,\frac{\left(\rho_{12}^2\right)'}{\rho_{13}^3}\Bigg],\\
y' &= \frac{\left[(1-2\mu)\rho_{12}^2 + \rho_{13}^2 - \rho_{23}^2\right]}{2\rho_{12}^3} + \frac{1}{2}\left[-(1-2\mu)v_{12}^2 + (v_{23}^2 - v_{13}^2)\right],
\end{aligned} \tag{6.3}$$

де

$$E_{13} = v_{13}^2 - \frac{2}{\rho_{13}}, \qquad E_{23} = v_{23}^2 - \frac{2}{\rho_{23}}.$$

При дослідженні якісних характеристик руху в рамках обмеженої і загальної задач трьох тіл виявилося ефективним введення “плоских” координат:

$$x = -\boldsymbol{\rho}_3\boldsymbol{\rho}_{12}, \qquad y = -\boldsymbol{\rho}_3\boldsymbol{\rho}'_{12}. \tag{6.4}$$

Як показано в [17], у круговій обмеженій задачі трьох тіл x і y є проєкціями вектора $\boldsymbol{\rho}_3$ на плоскі осі ортогональної системи координат, що обертається. У випадку еліптичної обмеженої задачі ці величини також у деякому узагальненому сенсі є проєкціями вектора

$\boldsymbol{\rho}_3$ на осі рухомої системи відліку, зорієнтовані вздовж напрямків векторів $-\boldsymbol{\rho}_{12}$ і $-\boldsymbol{\rho}'_{12}$. Як виявилося [19], застосування рухомої системи координат із початком у центрі мас і парою осей, зорієнтованих вздовж напрямків векторів $-\boldsymbol{\rho}_{12}$ і $-\boldsymbol{\rho}'_{12}$, є ефективним і у випадку загальної задачі трьох тіл. Цікавим є те, що змінну x також можна зобразити у вигляді

$$x = \frac{1}{2}\big[-(\mu_1-\mu_2)\rho_{12}^2 + (\mu_1+\mu_2)\big(\rho_{23}^2-\rho_{13}^2\big)\big],$$

$$x = \frac{1}{2}\big[-(1-2\mu)\rho_{12}^2 + \rho_{23}^2 - \rho_{13}^2\big]$$

відповідно для загальної і обмеженої задач трьох тіл.

Диференціюючи рівності (6.4), отримуємо

$$\begin{aligned} x' &= y - \boldsymbol{\rho}_{12}\boldsymbol{\rho}'_3, \\ y' &= -\frac{1-\mu_3}{\rho_{12}^3}\,x - \boldsymbol{\rho}'_{12}\boldsymbol{\rho}'_3 - \mu_3\boldsymbol{\rho}_3\left(-\frac{\boldsymbol{\rho}_{13}}{\rho_{13}^3} + \frac{\boldsymbol{\rho}_{23}}{\rho_{23}^3}\right). \end{aligned} \tag{6.5}$$

Як бачимо, друге з цих рівнянь з урахуванням рівностей

$$\boldsymbol{\rho}'_{12}\boldsymbol{\rho}'_3 = \frac{1}{2}\big[(\mu_1-\mu_2)v_{12}^2 - (\mu_1+\mu_2)\big(v_{23}^2-v_{13}^2\big)\big],$$

$$\boldsymbol{\rho}'_{12}\boldsymbol{\rho}'_3 = \frac{1}{2}\big[(1-2\mu){v_{12}}^2 + {v_{13}}^2 - {v_{23}}^2\big],$$

справедливих відповідно для загальної і обмеженої задач, за умови $\mu_3 = 0$ входить у систему (6.3).

Оперуючи рівняннями відстаней (6.2) і (6.3) сукупно з системою (6.5), нам вдалося довести обмеженість руху щодо плоских координат x і y як в обмеженій, так і в загальній задачі трьох тіл [17, 19], що послугувало ключовим моментом для доведення обмеженості руху щодо всіх трьох координат [25]. Важливим є той факт, що доведення обмеженості руху, а конкретніше стійкості за Лагранжем, вдалося провести єдиним методом і для обмеженої, і для загальної задач трьох тіл. Оскільки якісні висновки щодо характеру руху в обох задачах збігаються, то є всі підстави стверджувати, що модель обмеженої задачі, а точніше еліптичної обмеженої задачі, є достовірною як у теоретичному сенсі, так і щодо практичних вимог до неї. Заслуговує на увагу і той факт, що поняття стійкої за Хіллом пари, яке сформувалося під впливом обмеженої задачі, певною мірою відіграє роль об'єднуючої ланки, дозволяючи адаптувати результати, отримані в обмеженій задачі, для загальної задачі трьох тіл. При всій простоті постановки обмеженої задачі, як бачимо, вона унікальна тим, що зберігає основні властивості загальної задачі трьох тіл, виконуючи тим самим роль ефективного наближення останньої.

На закінчення приведемо дві теореми, які є незначним підсиленням теорем 1, 2 з роботи [25].

Теорема 5. *Якщо в просторовій обмеженій еліптичній задачі трьох тіл рух нескінченно малої частки, що визначається рівняннями (1.4), задовольняє умову дистальності і при* $\mu = 1/2$ *не належить многовиду симетричних рухів*

$$\boldsymbol{\rho}_{12}'' = -\frac{\boldsymbol{\rho}_{12}}{|\boldsymbol{\rho}_{12}|^3},$$

$$\boldsymbol{\rho}_3'' = -\frac{\boldsymbol{\rho}_3}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|^3},$$

то він стійкий за Лагранжем.

У роботі [25] ми взагалі виключали з розгляду ситуацію, коли маси, що утворюють пару, рівні. Тут, допускаючи рівність мас, які утворюють пару, ми усуваємо з розгляду лише множину симетричних рухів, серед яких можуть бути необмежені. Лебегова міра симетричних рухів щодо фазового простору як системи (1.3), так і системи (1.4) дорівнює нулю. Детальніше про симетричні рухи див. [26].

Теорема 6. *Нехай рух $\boldsymbol{\rho}(\tau) = (\boldsymbol{\rho}_{12}, \boldsymbol{\rho}_3)^T$ системи (1.3), який належить множині*

$$\Omega = \big\{\big(\boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{\rho}\big) : T - U = h < 0\big\},$$

є дистальним. Тоді, якщо пара матеріальних точок (μ_1, μ_2), яка відповідає цьому руху, стійка за Хіллом, причому за умови, що $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, цей рух не належить многовиду симетричних рухів

$$\boldsymbol{\rho}_{12}'' = -2\mu\,\frac{\boldsymbol{\rho}_{12}}{|\boldsymbol{\rho}_{12}|^3} - \mu_3\,\frac{\boldsymbol{\rho}_{12}}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|^3},$$

$$\boldsymbol{\rho}_3'' = -\frac{\boldsymbol{\rho}_3}{|\boldsymbol{\rho}_{13}|^3},$$

то він стійкий за Лагранжем.

Доведення цих теорем не виходить за межі підходу, запропонованого у роботі [25].

7. Висновки. У результаті дослідження рівнянь руху у задачі трьох тіл нам вдалося отримати достатні умови обмеженості руху як в обмеженій задачі трьох тіл, так і в її загальному випадку. При цьому основну увагу було зосереджено на ролі моменту кількостей руху як стабілізуючого фактора. Як ми могли переконатися, загальна й обмежена задачі трьох тіл як ідейно споріднені тісно пов'язані між собою, і при розв'язанні конкретних практичних задач може бути корисним їхнє паралельне використання.

Автор заявляє про відсутність конфлікту інтересів. Усі необхідні дані містяться в статті. Автор засвідчує відсутність спеціального фінансування цієї статті.

Література

1. В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт, *Математические аспекты классической и небесной механики*, УРСС, Москва (2002).
2. К. Маршал, *Задача трех тел*, Институт компьютерных исследований, Москва, Ижевск (2004).
3. A. Celletti, *Stability and chaos in celestial mechanics*, Springer-Verlag, Berlin; Praxis Publishing, Chichester (2010).
4. N. Georgakarakos, *Stability criteria for hierarchical triple systems*, http://arXiv: 1408.5431v1 [astro-ph.EP] 22 Aug. 2014, 21 p. (2014).
5. S. P. Sosnitskii, *On the orbital stability of triangular Lagrangian motions in the three-body problem*, Astron. J., **136**, 2533 – 2540 (2008).
6. С. П. Сосницький, *Про координати Якобі у задачі трьох тіл*, Аналітична механіка та її застосування, Збірник праць Інституту математики НАН України, **7**, № 3, 415 – 424 (2010).

7. В. Себехей, *Теория орбит. Ограниченная задача трех тел*, Наука, Москва (1982).
8. А. Е. Рой, *Движение по орбитам*, Мир, Москва (1981).
9. V. G. Szbehely, *Analytical determination of the measure of stability of triple stellar systems*, Celestial Mech. Dynam. Astronom., **15**, 107 – 110 (1977).
10. Z. Makó, F. Szenkovits, *About the Hill stability of extrasolar planets in stellar binary systems*, Celestial Mech. Dynam. Astronom., **101**, 273 – 287 (2008).
11. Y. Lian, G. Gomez, J. J. Masdemont, G. Tang, *A note on the dynamics around the Lagrange collinear points of the Earth – Moon system in a complete Solar system model*, Celestial Mech. Dynam. Astronom., **115**, 185 – 211 (2013).
12. L. Zhao, *Quasi-periodic solutions of the spatial lunar three-body problem*, Celestial Mech. Dynam. Astronom., **119**, 91 – 118 (2014).
13. M. Song, X. He, D. He, *Displaced orbits for solar sail equipped with reflectance control devices in Hill's restricted three-body problem with oblateness*, Astrophys. Space Sci., **361**, № 10, Paper № 327 (2016).
14. F. J. T. Salazar, C. R. McInnes, O. C. Winter, *Periodic orbits for space-based reflectors in the circular restricted three-body problem*, Celestial Mech. Dynam. Astronom., **128**, 95 – 113 (2017).
15. G. W. Hill, *Researches in the Lunar theory*, Amer. J. Math., **1**, 5 – 26 (1878).
16. В. Г. Голубев, Е. А. Гребенников, *Проблема трех тел в небесной механике*, Изд-во МГУ, Москва (1985).
17. S. P. Sosnitskii, *On the Lagrange stability of motion in the planar restricted three-body problem*, Adv. Space Res., **59**, 2459 – 2465 (2017).
18. S. P. Sosnitskii, *On the boundedness of motion in the spatial circular restricted three-body problem*, Int. J. Non-Linear Mech., **104**, 116 – 120 (2018).
19. S. P. Sosnitskii, *On an analogy in the restricted and general three-body problems*, Adv. Space Res., **64**, 1160 – 1165 (2019).
20. D. G. Saari, *Restrictions on the motion of the three-body problem*, SIAM J. Appl. Math., **26**, № 4, 806 – 815 (1974).
21. C. Marchal, D. G. Saari, *Hill regions for the general three-body problem*, Celestial Mech. Dynam. Astronom., **12**, 115 – 129 (1975).
22. C. Marchal, G. Bozis, *Hill stability and distance curves for general three-body problem*, Celestial Mech. Dynam. Astronom., **26**, 311 – 333 (1982).
23. G. Bozis, *Zero velocity surfaces for the general planar three-body problem*, Astrophys. Space Sci., **43**, 355 – 368 (1976).
24. K. Zare, *The effects of integrals on the totality of solutions of dynamical systems*, Celestial Mech. Dynam. Astronom., **14**, 73 – 83 (1976).
25. S. P. Sosnitskii, *On the Lagrange stability of motion in the spatial elliptic restricted three-body problem*, Astron. J., **160**, (2020).
26. С. П. Сосницький, *Про один окремий випадок руху у задачі трьох тіл*, Укр. мат. журн., **73**, № 10, 1404 – 1413 (2021); ***English translation:*** *Ukr. Math. J.*, **73**, № 10, 1622 – 1632 (2022).

Одержано 17.04.23