

ДИНАМІКА ТВЕРДОГО ТІЛА З ВНУТРІШНІМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДИ, ОБУМОВЛЕНИМИ РІДИНОЮ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ

Олег Лимарченко

*Київський національний університет імені Т. Шевченка
просп. акад. Глушкова, 4-Е, Київ, 03022, Україна
e-mail: olelim2010@yahoo.com*

Problems of the dynamics of a rigid body with internal degrees of freedom always are of theoretical and practical interests. The complexity of the research of these objects is caused first by the necessity of the study of the system behavior in the combined statement. Special problems appear in the case where internal degrees of freedom are defined by components having a continuum structure. Moreover, for the description of the system behavior, it is necessary to use a mathematical model of an inhomogeneous mathematical structure (a system of ordinary differential equations for the motion of the rigid body and a partial differential equation for the description of the continuum component), which is sufficiently complicated. Additional complexities appear in the case of the motion of rigid bodies with a liquid because the motion of the rigid body is described in the Lagrange variables whereas the motion of a liquid is described in the Euler variables. Moreover, the problem of determination of forces of interaction between components is also complex. In the present paper, we study the problem of motion of a carrying body with a liquid with a free surface, which is one of the important theoretical and practical problems. The main attention is paid to the cases of motion of the mechanical system in the form of a cylindrical reservoir — a liquid with a free surface in the nonlinear range of perturbations of the free surface of the liquid for a considerable manifestation of the combined character of motion and for the angular motion of the carrying body. On the basis of performed research, we obtain specific features of development of resonance processes in the system. For vibrations of the system in a pendulum suspension, we establish that a decrease in the suspension length leads to a change in the priority of location on normal modes in the ascending order of eigenfrequencies. For all types of resonances, we show the absence of the passage of the system in a steady mode of motion in the classical sense, which is confirmed by experimental results.

Задачі динаміки твердого тіла з внутрішніми степенями свободи завжди викликали теоретичний і практичний інтерес. Складність дослідження таких об'єктів обумовлено, перш за все, необхідністю проводити вивчення поведінки системи у сумісній постановці. Особливі проблеми виникають у випадках, коли внутрішні степені свободи визначають компоненти, які мають континуальну структуру. При цьому для опису поведінки системи буде потрібно використовувати математичну модель неоднорідної математичної структури (система звичайних диференціальних рівнянь для руху твердого тіла і рівняння з частинними похідними для опису континуальної складової), що є достатньо складним. Додаткові складнощі виникають у випадку руху твердих тіл із рідиною, коли рух твердого тіла описують з лагранжовими змінними, а рух рідини — з ейлеровими. Крім того, складною проблемою є також визначення сил взаємодії між компонентами. Однією з важливих у теоретичному і практичному планах є задача про рух тіла-носія з рідиною з вільною поверхнею, яку досліджуємо у цій роботі. Головну увагу приділено випадкам, коли рух механічної системи циліндричний резервуар–рідина з вільною поверхнею відбувається у нелінійному діапазоні збурень вільної поверхні рідини при значному прояві фактора сумісності руху і при кутових рухах

тіла-носія. На основі проведених досліджень показано особливості розвинення резонансних процесів у системі. При дослідженні коливань системи на маятниковому підвісі встановлено, що при зменшенні довжини підвісу в системі відбувається зміна черговості розташування форм коливань при їхньому розміщенні в порядку зростання власних частот. Для всіх типів резонансів показано, що виходу системи у класичному сенсі на усталений режим коливань взагалі не відбувається, і це підтверджено експериментальними результатами.

Вступ. Розглядаємо задачі нелінійної динаміки сумісного руху циліндричного резервуара та рідини, що частково заповнює його, при кутових рухах тіла-носія. У динаміці конструкцій з рідиною з вільною поверхнею найбільш складні режими поведінки систем спостерігаємо у випадку значних проявів сумісності руху конструкції-носія і рідини з вільною поверхнею. Особливі складнощі виникають при розгляді режимів поведінки систем у нелінійному діапазоні збурень. Додаткові ускладнення вносить кутовий рух таких систем, який для більшості практичних випадків є домінуючим. Саме кутові рухи конструкцій з рідиною є головними в задачах морської хитами, керування польотами космічних і повітряних апаратів, при сейсмічних збуреннях систем зберігання і транспортування рідини тощо. Одночасно для таких систем притаманний значний прояв фактора сумісності руху конструкції і рідини. В той же час у більшості сучасних досліджень у галузі динаміки тіл з рідиною розглядають випадки поступального руху конструкції-носія при нехтуванні сумісністю рухів складових компонент. Для задач нелінійної динаміки конструкцій з рідиною створено ефективні підходи для дослідження перехідних і резонансних процесів. Відразу зазначимо, що методи, основані на лінійних моделях, є ефективними лише в малому діапазоні зміни динамічних параметрів системи і в переважній більшості дають неповну інформацію про реальну поведінку конструкцій з рідиною [1 – 5]. Існуючі нелінійні методи дослідження задач динаміки конструкцій з рідиною можна умовно поділити на три групи.

Перша група: методи, що ґрунтуються на ідеях методів збурень із зведенням вихідної нелінійної задачі до розв'язання послідовності неоднорідних крайових задач. Це насамперед методи, розглянуті в [4, 5]. Використання таких методів включає елементи, які важко алгоритмізувати. Такі методи активно розвивалися до кінця 80-х років минулого сторіччя і зараз досліджень такими методами практично не виконують.

Друга група: методи дослідження, які ґрунтуються на сумісному використанні варіаційних підходів і методу модальної декомпозиції [6 – 8]). Ці методи активно розвиваються з другої половини 70-х років минулого сторіччя і дотепер. Саме ці методи поєднують можливості аналітичних підходів нелінійної механіки з можливостями сучасних методів апроксимації розв'язків допоміжних задач енергетичними методами математичної фізики. Всі головні результати дослідження резонансних і перехідних процесів у динаміці конструкцій з рідиною одержано саме на основі таких методів.

Третю групу методів, яка активно розвивається, оснований на ідеях поточної апроксимації просторових залежностей. Таких методів існує достатньо багато. Переважну увагу в них зосереджено на дослідженні перехідних процесів. Задачі динаміки сумісного руху конструкцій з рідиною практично не розглядалися. Важливою особливістю цих методів є відсутність глибокого аналізу похибок алгоритмів, що використовуються, з подальшим аналізом впливу цих похибок на остаточні результати, відсутність загальних якісних висновків щодо поведінки таких динамічних систем [5, 9].

Виходячи з аналізу існуючих методів дослідження нелінійних задач динаміки сумісного руху, в цій роботі будемо використовувати саме метод другої групи. Такі методи, як

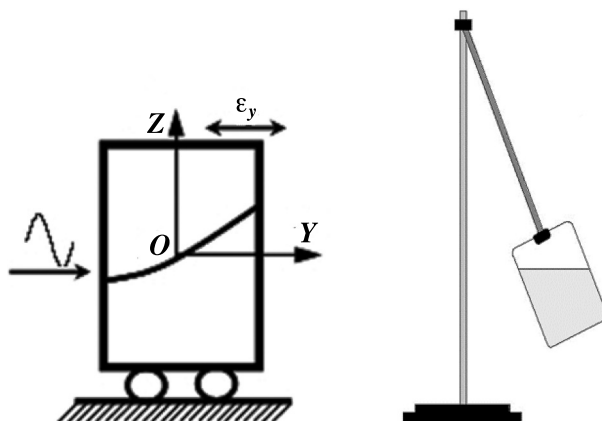


Рис. 1. Загальна схема поступального і кутового рухів резервуара з рідиною.

правило, ґрунтуються на варіаційному формулюванні задачі динаміки системи, методах нелінійної механіки і варіаційних методах математичної фізики для розв’язання (представлення розв’язків) просторових задач.

1. Математична модель системи. Розглянемо задачу про рух системи конструкція – рідина з вільною поверхнею. Вважаємо, що конструкція має порожнину циліндричної форми кругового перерізу, частково заповнену рідиною. Конструкцію розглядаємо як абсолютно тверде тіло, що здійснює поступальний і обертальний рухи під дією активних зовнішніх сил і моментів, а також за наявності кінематичних збурень. Покладаємо, що рідина є ідеальною, нестисливою, однорідною, а її початковий рух є безвихровим. Оскільки для більшості практичних задач число Рейнольдса лежить у межах $10^4 \leq Re \leq 10^6$, то при моделюванні властивостей в’язкості можна обмежитися припущенням теорії примезового шару і звести дію сил в’язкості до узагальненої дисипації за методикою з [3]. Розв’язок задачі будемо за методом із [6, 10], який пройшов багатобічну апробацію для задач динаміки конструкцій з рідиною при силовому і моментному збудженні руху і порівняння з якісними результатами теоретичних робіт і експериментів [5, 8, 9].

Математична модель системи є об’єктом неоднорідної математичної структури. Рух рідини описують диференціальні рівняння з частинними похідними, а рух конструкції — система звичайних диференціальних рівнянь.

За припущення безвихрового початкового руху баротропної рідини, за умови потенціальності зовнішніх сил і згідно з теоремою Лагранжа абсолютний рух рідини і надалі буде потенціальним. Переносний рух будемо задавати в системі координат, незмінно зв’язаній з резервуаром, причому вісь Oz направлена вздовж осі циліндра вгору. При цьому резервуар здійснює поступальний рух зі швидкістю $\dot{\epsilon}$ і обертальний рух із кутовою швидкістю $\vec{\omega}$. На рис. 1 показано загальну схему сумісного руху резервуара з рідиною для поступального (ліворуч) і кутового (праворуч) руху тіла-носія. Введені так звані літакові кути, що докладно описано в [6]. Тут і далі $\vec{r}$ — радіус-вектор точок області τ у зв’язаній системі координат, причому початок системи координат обираємо в центрі незбуреної вільної поверхні рідини. Тоді

$$\vec{v}_a = \vec{\nabla}\Phi, \quad \vec{v}_r = \vec{\nabla}\Phi - \vec{\omega} \times \vec{r} - \dot{\epsilon}. \quad (1)$$

Оскільки область, яку займає рідина, має вільну поверхню і ця область при відносно малих збуреннях рідини є циліндричною, введемо до розгляду рівняння вільної поверхні рідини з циліндричними координатами (t — час)

$$z = \xi(r, \theta, t).$$

Потенціал швидкостей для такого класу задач зручно зобразити у вигляді

$$\Phi = \varphi + \dot{\vec{\varepsilon}} \cdot \vec{r} + \vec{\omega} \cdot \vec{\Omega}. \quad (2)$$

Тут перший доданок відповідає потенціалу швидкостей хвильового руху рідини, другий — потенціалу швидкостей, обумовленому поступальним рухом резервуара, а третій — потенціалу швидкостей, що викликаний обертальним рухом резервуара. Зауважимо, що на відміну від швидкості поступального руху, яка може бути довільного порядку малості, кутова швидкість руху резервуара і кути його нахилу мають бути малими, оскільки їхні скінченні значення неодмінно приведуть до скінченних значень збурень вільної поверхні рідини.

Зі співвідношення (2) видно, що при наявності обертального руху тіла-носія до математичного формулювання задачі введено три нові невідомі скалярні функції — компоненти $\vec{\Omega}$, для яких до того ж крайові задачі формулюються в більш складній формі, ніж для скалярної компоненти потенціалу φ .

Математичне формулювання задачі про рух системи резервуар — рідина з вільною поверхнею можна звести до сукупності обмежень кінематичного характеру, динамічних рівнянь і початкових умов. З точки зору загальних властивостей опису механічних систем на основі варіаційного принципу Гамільтона — Остроградського кінематичні умови слід розглядати як механічні в'язі, що накладають обмеження на варіації невідомих. Такі ж за характером обмеження накладає умова нерозривності потоку рідини і умова розв'язуваності крайових задач. Надалі динамічні граничні умови одержуємо з варіаційного принципу Гамільтона — Остроградського як природні.

Сукупність кінематичних обмежень задачі за прийнятих позначень набуває такої форми. З умов неперервності потоку і умов розв'язності задачі випливає (S і S_0 — відповідно збурена і незбурена вільна поверхня рідини)

$$\Delta\varphi = 0, \quad \Delta\vec{\Omega} = 0 \quad \text{у} \quad \tau, \quad \int_{S_0} \xi \, dS = 0, \quad (3)$$

умова неперетікання на межі контакту резервуар — рідина Σ з одиничною зовнішньою нормаллю $\vec{n}$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma; \quad \frac{\partial\Omega}{\partial n} = \vec{r} \times \vec{n} \quad \text{на} \quad \Sigma + S_0, \quad (4)$$

і умова неперетікання через вільну поверхню рідини

$$\begin{aligned} \frac{\partial\xi}{\partial t} + \vec{\nabla}\xi \cdot \left[\vec{\nabla}\varphi + \vec{\nabla}(\vec{\omega} \cdot \vec{\Omega}) - \dot{\vec{\varepsilon}} - \vec{\omega} \times \vec{r} \right] \\ = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \vec{\omega} \cdot \frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial z} - \dot{\varepsilon}_z - (\vec{\omega} \times \vec{r})|_z \quad \text{на} \quad S_\xi. \end{aligned} \quad (5)$$

Найбільш ефективно варіаційний принцип Гамільтона — Остроградського використовують у випадку, коли всі кінематичні обмеження задачі задовольняються до чисельної реалізації варіаційної задачі. Якщо прийняти представлення шуканих змінних у вигляді розкладів за формами коливальних лінійної задачі

$$\xi = \sum_n a_n(t) \psi_n(r, \theta), \quad (6)$$

$$\varphi = \sum_n b_n(t) \psi_n(r, \theta) \frac{\operatorname{ch} \kappa_n(z + H)}{\kappa_n \operatorname{sh} \kappa_n H}, \quad (7)$$

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_0 + \sum_n \vec{q}_n(t) \psi_n(r, \theta) \frac{\operatorname{ch} \kappa_n(z + H)}{\kappa_n \operatorname{sh} \kappa_n H}, \quad (8)$$

то всі кінематичні обмеження задовольняються заздалегідь окрім кінематичної граничної умови на вільній поверхні рідини, яка задовольняється лише в рамках лінійних обмежень.

Тут $\psi_n(x, y)$ — повна ортогональна система функцій в області S_0 , яку можна знайти з розв'язання крайової задачі Неймана з параметром κ_n . При цьому L_0 — контур, що обмежує S_0 ;

$$\Delta \psi_k + \kappa_k^2 \psi_k = 0 \quad \text{на} \quad S_0; \quad \frac{\partial \psi_k}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad L_0. \quad (9)$$

Рівняння цієї задачі є наслідком крайової задачі (3), а гранична умова — наслідком співвідношення (4). Вектор-функція $\vec{\Omega}_0$ є потенціалом Стокса – Жуковського, яку одержують як розв'язок крайової задачі Неймана для рівняння Лапласа

$$\Delta \vec{\Omega}_0 = 0; \quad \frac{\partial \vec{\Omega}_0}{\partial n} = \vec{r} \times \vec{n} \quad \text{на} \quad S_0 + \Sigma.$$

При такому виборі координатних функцій ψ_n умова збереження об'єму рідини, яка є еквівалентною умові розв'язуваності вихідної крайової задачі, виконується для кожної координатної функції, а отже, й для всього розкладу (6). Цю крайову задачу Неймана докладно досліджено в [1], де побудовано алгоритми розв'язання для різних форм порожнин.

Одним із найбільш складних у побудові математичної моделі резервуара з рідиною з вільною поверхнею є виключення нелінійної кінематичної граничної умови на вільній поверхні рідини (5). Проблема виключення цієї умови є типовою при дослідженні задач динаміки резервуарів із рідиною з вільною поверхнею і є складовою частиною практично всіх існуючих методів розв'язання задач такого класу, особливо методів, які базуються на застосуванні потенціалу швидкостей рідини в аналітичній формі. Таку проблему можна розв'язати на основі методу Фур'є [4, 5], методу Гальоркіна і варіаційного методу [5 – 8] із застосуванням ідей нелінійної механіки. При цьому задачу про виключення кінематичної граничної умови на вільній поверхні рідини можна розв'язувати як незалежно від вивчення задачі динаміки [5, 6, 10], так і як складову частину її розв'язання у випадку, коли кінематична гранична умова є природною для варіаційного формулювання задачі [5, 7, 8, 11] на основі принципу Бейтмена). Найбільш ефективно таку задачу можна розв'язати у випадку, коли координатні функції ортогональні та задовольняють кінематичні граничні умови на стінках резервуара. Це вказує на доцільність використання форм вільних коливань, які одержують на основі розв'язання відповідної лінійної задачі, як координатних функцій.

Розглянемо спосіб виключення нелінійної кінематичної граничної умови на вільній поверхні рідини, який базується на методі Гальоркіна і основах нелінійної механіки. Для наближеного виключення цієї умови необхідно здійснити вибір базових параметрів системи, за допомогою яких надалі будемо виражати залежні параметри. Як впливає з теореми: безвихровий рух ідеальної однорідної нестисливої рідини повністю визначається рухом її границь, число степенів свободи руху всього об'єму рідини з вільною поверхнею дорівнює числу степенів свободи руху самої вільної поверхні і бічних стінок рідини.

Виходячи з цього за базові параметри системи, які характеризують рух вільної поверхні рідини, доцільно обрати змінну ξ , а φ і Ω слід вважати залежними. З розкладів (6)–(8) вибір незалежних параметрів реалізуємо таким чином: сукупність амплітудних параметрів розкладу збурень вільної поверхні в ряд за формами вільних коливань рідини розглядаємо як незалежну, а параметри розкладів у ряд скалярної φ і векторної $\vec{\Omega}$ складових потенціалу швидкостей, відповідно b_i і $\vec{q}_i$, розглядаємо як залежні від a_i параметри. При цьому сукупність амплітудних параметрів a_i вичерпно характеризує кінематику рідини з вільною границею.

Для визначення конкретної форми залежності b_i і $\vec{q}_i$ від a_k скористаємося кінематичною граничною умовою на вільній поверхні (5). Оскільки кінематична гранична умова має виконуватися для довільних законів руху резервуара, умова (5) розпадається на такі чотири умови на поверхні S (при $z = \xi$):

$$L^{(0)}(\xi, \varphi) = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \vec{\nabla} \xi \cdot \vec{\nabla} \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad (10)$$

$$L^{(k)}(\xi, \Omega_0) = \vec{\nabla} \xi \cdot \vec{\nabla} \Omega_k - \frac{\partial \Omega_k}{\partial z} + \vec{i}_k \cdot (\vec{i}_3 \times \vec{r}), \quad k = 1, 2, 3. \quad (11)$$

Тут позначено через Ω_k компоненти векторної складової потенціалу швидкостей $\vec{\Omega}$, а через $L^{(i)}(f, g)$ — диференціальні оператори $i = 0, 1, 2, 3$.

Отже, з точки зору механічних параметрів a_i кінематична гранична умова являє собою одну непроінтегровану за часом (10) і три голономні (11) механічні в'язі.

Додатково пояснимо можливість розкладу умови (5) на чотири незалежних (10), (11), оскільки одержання з однієї скалярної умови чотирьох нових умов виглядає незвичним. З одного боку, як це наведено вище, з вимоги виконання умови для довільних законів руху резервуара (а те, що форма кінематичної умови для рідини не повинна залежати від закону руху як рідини, так і резервуара, впливає з самого визначення кінематичної в'язі) випливає, що при розгляді почергово відмінних від нуля компонент $\vec{\omega}$, а також випадку, коли $\vec{\omega} = 0$, одержимо чотири умови для реалізації згаданої властивості кінематичної в'язі. З другого боку, як було показано вище, рух рідини повністю визначено рухом її меж. Тому змінні φ і Ω_k залежать лише від однієї змінної ξ . Проте, одне співвідношення (5) дозволить визначити лише одну залежність, тому три інші залежності можуть бути обрані довільним чином. Доцільно обрати їх із міркувань максимального спрощення форми цих залежностей. Такою формою, яка забезпечує розщеплення умов для Ω_k на незалежні, саме і є умови (11).

Подальшу процедуру визначення залежності параметрів b_i і $\vec{q}_i$ від амплітудних параметрів a_i проводимо на основі методу Гальоркіна. Для цього підставляємо розклади (6)–(8) у диференціальні оператори $L^{(i)}(f, g)$, помножуємо на систему функцій ψ_k та інтегруємо по області S_0 :

$$\int_{S_0} L^{(i)} \left(\xi, \frac{\varphi}{\Omega_k} \right) \Big|_S \psi_k dS = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, \dots \quad (12)$$

При цьому безпосереднє обчислення значень диференціальних операторів $L^{(i)}$ на наперед невідомій вільній поверхні S , тобто при $z = \xi$, виконано шляхом перенесення цього оператора на поверхню S_0 із використанням методів теорії збурень.

Особливою рисою запропонованого підходу є те, що система функцій ψ_i , яку використовують як координатні функції, є ортогональною на S_0 . Це приводить до найбільш простої форми переходу від континуальної структури граничної умови (5) до її дискретного аналога з параметрами a_i , b_i , $\vec{q}_i$, що обумовлює можливість одержання аналітичного розв'язку задачі визначення взаємозалежності b_i і $\vec{q}_i$ від a_i у явному вигляді. Зазначимо, що згідно з роботами [7, 8, 11] за координатні функції прийнято неортогональну на вільній поверхні систему $\Phi_k(x, y, \xi) = \psi_k(x, y) \frac{\operatorname{ch} \kappa_k(\xi + H)}{\kappa_k \operatorname{sh} \kappa_k H}$, яку одержано як результат знесення ортогональної на S_0 системи функцій $\phi_k(x, y, 0)$ на збурену вільну поверхню S (знесення зроблено на основі методів теорії збурень). Як наслідок, одержана на основі методів робіт [7, 8, 11] система рівнянь для визначення залежностей b_i і $\vec{q}_i$ від a_k є більш складною, зокрема, не приводить до одиначної матриці при старших похідних невідомих, що ускладнює пошук аналітичної форми розв'язку.

Зауважимо також, що якщо за вихідні прийняти розклади змінних ξ , φ_0 і $\vec{\Omega}$, то згідно з роботами [4, 5] процедура виконання (5) приводить до розв'язання сукупності лінійних однорідних крайових задач для фіксованої області, які одержано [4] на основі диференціального підходу. На ранньому етапі розвинення варіаційних методів це було одним із методів перевірки алгоритмів.

Конкретно виключення кінематичної граничної умови (5) (або сукупності умов (10) і (11)) робили так. Підставляємо розклади змінних (6)–(8) в умови (10) і (11), помножуємо одержані вирази на ψ_p та інтегруємо одержане співвідношення по S_0 . При цьому гіперболічні функції розкладаємо в ряд по ξ в околі $\xi = 0$, далі виконуємо інтегрування. Після виконання такої процедури співвідношення (12) можна привести до вигляду

$$b_i = \dot{a}_i + \sum_{n,m} \dot{a}_n a_m \gamma_{nmi}^w + \sum_{n,m,l} \dot{a}_n a_m a_l \delta_{nml}^w + \sum_{n,m,l,k} \dot{a}_n a_m a_l a_k h_{nmlki}^w, \quad (13)$$

$$\vec{q}_p = \sum_j a_j \vec{\beta}_{jp}^u + \sum_{j,k} a_j a_k a_k \vec{\gamma}_{jkp}^u + \sum_{j,k,l} a_j a_k a_l \vec{\delta}_{jklp}^u. \quad (14)$$

Коефіцієнти зі співвідношення (13), (14) є квадратурами від функцій ψ_i і $\vec{\Omega}_0$, які обчислено по області S_0 , або є певними виразами від цих квадратур. Конкретну форму для них наведено в [6]. Усі залежності коефіцієнтів для b_i і $\vec{q}_p$ від a_i і $\dot{a}_j$ одержано в аналітичному вигляді з точністю до величин, які гарантують одержання рівнянь руху з точністю до нелінійних членів третього порядку малості включно для довільного числа амплітудних параметрів.

У результаті застосування розкладів шуканих величин по формах коливань відповідної лінійної задачі з попереднім задоволенням нелінійної кінематичної граничної умови на вільній поверхні рідини побудовано розклади шуканих величин, які тотожно задовольняють вимоги нерозривності потоку в області τ (3), умови розв'язуваності задачі, кінематичні граничні умови на твердій межі області τ (4) і з точністю до величин третього порядку малості кінематичну граничну умову на вільній поверхні рідини (5). Зауважимо, що за цією методикою нелінійну кінематичну граничну умову на вільній поверхні рідини можна задовольнити з будь-якою наперед заданою точністю. Таку процедуру реалізовано для довільних поступальних і малих кутових рухів резервуара.

В основу постановки задачі прийнято варіаційне формулювання у формі варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського в класичному вигляді

$$\delta I = 0, \quad I = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad L = T - \Pi.$$

Тут T і Π — відповідно кінетична й потенціальна енергія системи. Тепер, беручи до уваги задоволення всіх кінематичних в'язів, можна побудувати функцію Лагранжа системи, яка вже буде відповідати вільній системі, а система параметрів a_i , α_i , ε_i — сукупність незалежних змінних, які повністю характеризують поведінку механічної системи резервуар — рідина з вільною поверхнею. Згідно із загальними властивостями варіаційного принципу Гамільтона — Остроградського на основі незалежних змінних a_i , α_i , ε_i отримаємо динамічні граничні умови та рівняння руху резервуара, які будуть наслідком техніки варіювання функції Лагранжа. При цьому побудована модель буде мінімальною за розмірністю, оскільки число невідомих задачі дорівнює числу степенів свободи системи. Це відрізняє підхід на основі принципу Гамільтона — Остроградського від підходів на основі принципу Бейтмена, де розмірність значно вище.

Запишемо функцію Лагранжа у вигляді [6]

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} \left[\vec{\nabla} \varphi + \dot{\varepsilon} \cdot \vec{r} + \vec{\nabla} (\vec{\omega} \cdot \vec{\Omega}) \right]^2 d\tau + \frac{1}{2} M_r (\dot{\varepsilon})^2 + \frac{1}{2} I_{\text{res}}^{ij} \omega_i \omega_j \\ & - (M_r + M_1) g \varepsilon_z + \rho g (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_3) \\ & \times \int_{S_0} r \cos \theta (\xi + H) dS - \rho g (\sin \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3) \\ & \times \int_{S_0} r \sin \theta (\xi + H) dS - \frac{1}{2} \rho g \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \\ & \times \int_{S_0} \xi^2 dS - (M_1 h_1 + M_r h_r) (1 - \cos \alpha_1 \cos \alpha_2) \\ & - \sigma \int_{S_0} \sqrt{1 + (\vec{\nabla} \xi)^2} dS - \sigma \cos \theta_1 \int_{L_0} \xi dl + \vec{F} \cdot \vec{\varepsilon} + \vec{M} \cdot \vec{\chi}. \end{aligned} \quad (15)$$

У співвідношенні (15) використано такі позначення: ρ — густина рідини, g — прискорення вільного падіння, H — рівень заповнення, M_r і M_1 — маси резервуара та рідини, h_1 і h_r — зміщення центрів ваги рідини та резервуара щодо площини незбуреної вільної поверхні S_0 , $L_0 = S_0 \cap \Sigma$ — контур трифазного контакту резервуар — вільна поверхня — газ над вільною поверхнею, σ — поверхневий натяг на вільній поверхні рідини, θ_1 — контактний кут, I_{res}^{ij} — тензор інерції резервуара, визначений стосовно точки O , $\vec{F}$ і $\vec{M}$ — головний вектор і головний момент зовнішніх сил щодо точки O , які діють на резервуар (представлення потенціалів зовнішніх сил і моментів умовні), $\vec{\chi} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ — умовне представлення кутів повороту резервуара стосовно умовно нерухомої системи відліку.

Відразу відзначимо громіздкість через введення трьох додаткових потенціалів (це найбільш відчутно проявляється в обчисленні кінетичної енергії системи). Рівняння руху системи тепер одержуємо як рівняння Лагранжа другого роду, виходячи з форми функції Лагранжа з незалежними параметрами a_i , α_i , ε_i [6].

З перетвореної функції Лагранжа вільної системи можемо одержати такі рівняння Лагранжа другого роду:

$$\begin{aligned}
& \sum_i \ddot{a}_i \left(\delta_{ir} + \sum_j a_j A_{rij}^3 + \sum_{j,k} a_j a_k A_{rijk}^4 \right) \\
& + \frac{1}{\alpha_r^v} \ddot{\varepsilon} \cdot \left(\vec{B}_r^1 + \sum_i a_i \vec{B}_{ri}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{B}_{rij}^3 + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \vec{B}_{rijk}^4 \right) \\
& + \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{s=1}^3 \ddot{\alpha}_s \left[\sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_s} \left(E_{pr}^{1*} + \sum_i a_i E_{pri}^{2*} + \sum_{i,j} a_i a_j E_{prij}^{3*} \right) \right] \\
& = -k_r \dot{a}_r + \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j C_{ijr}^3 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k C_{ijk}^4 \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{p,s=1}^3 \omega_p \omega_s \left(E_{psr}^2 + 2 \sum_i a_i E_{psir}^3 \right) \\
& + \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{p=1}^3 \omega_p \left[\sum_i \dot{a}_i (E_{pir}^{2*} - E_{pri}^{2*}) + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j (E_{pijr}^{3*} - E_{prij}^{3*}) \right] \\
& + \frac{1}{2\alpha_r^v} \sum_{p=1}^3 \omega_p^{(k)} \left(E_{pr}^{1*} + \sum_i a_i E_{pri}^{2*} \right) \\
& + \dot{\varepsilon} \cdot \left(\sum_i \dot{a}_i \vec{D}_{ir}^2 + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j \vec{D}_{ijr}^3 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k \vec{D}_{ijk}^4 \right) \\
& + \frac{1}{2\alpha_r^v} \dot{\varepsilon} \sum_{p=1}^3 \omega_p \left(\vec{F}_{pr}^2 + 2 \sum_i a_i \vec{F}_{pir}^3 + 3 \sum_{i,j} a_i a_j \vec{F}_{pijr}^4 \right) \\
& - \frac{\alpha_r^s}{\alpha_r^v} g (\sin \alpha_1 \sin \alpha_3 - \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3) \\
& - \frac{\alpha_r^s}{\alpha_r^v} g (\sin \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3) - \frac{N_r}{\alpha_r^v} a_r g \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \\
& - \frac{\sigma}{\rho \alpha_r^v} \left[\lambda \cos \theta_1 + \kappa_r^2 N_r a_r - \frac{1}{4} \sum_{i,j,k} (\delta_{ijk}^4 + \delta_{rik}^4) a_i a_j a_k \right], \tag{16} \\
& \frac{\rho}{M_r + M_l} \sum_i \ddot{a}_i \left(\vec{B}_i^1 + \sum_j a_j \vec{B}_{ij}^2 + \sum_{j,k} a_j a_k \vec{B}_{ijk}^3 \right) + \ddot{\varepsilon} \\
& + \frac{\rho}{M_r + M_l} \sum_{s=1}^3 \ddot{\alpha}_s \left[\sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_s} \left(\vec{F}_p^1 + \sum_i a_i \vec{F}_{pi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{F}_{pij}^3 \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\vec{F}}{M_r + M_l} + \vec{g} - \frac{\rho}{M_r + M_l} \left(\sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \vec{B}_{ij}^2 + 2 \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k \vec{B}_{ijk}^3 \right) \\
&\quad - \frac{\rho}{M_r + M_l} \left[\sum_{p=1}^3 \omega_p \left(\sum_i \dot{a}_i \vec{F}_{pi}^2 + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j \vec{F}_{pij}^3 + 3 \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k \vec{F}_{pijk}^4 \right) \right] \\
&\quad + \frac{\rho}{M_r + M_l} \sum_{p=1}^3 \omega_p^{(k)} \left(\vec{F}_p^1 + \sum_i a_i \vec{F}_{pi}^2 \right), \tag{17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_i \ddot{a}_i \left[\sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left(E_{pi}^{1*} + \sum_j a_j E_{pij}^{2*} + \sum_{i,k} a_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) \right] \\
&\quad + 2\ddot{\varepsilon} \cdot \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left(\vec{F}_p^1 + \sum_i a_i \vec{F}_{pi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{F}_{pij}^3 + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \vec{F}_{pijk}^4 \right) \\
&\quad + \sum_{n=1}^3 \ddot{\alpha}_n \left[2 \sum_{p,s=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{\alpha}_n} \left(\frac{1}{\rho} I_{res}^{ps} + E_{ps}^2 + \sum_i a_i E_{psi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j E_{psij}^3 \right) \right] \\
&= 2 \sum_{p,s=1}^3 \left(\omega_{p,r}^* \omega_s + \omega_p^{(k)} \frac{\partial \omega_s}{\partial \dot{\alpha}_r} \right) \\
&\quad \times \left(\frac{1}{\rho} I_{res}^{ps} + E_{ps}^2 + \sum_i a_i E_{psi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j E_{psij}^3 \right) \\
&\quad + \sum_{p=1}^3 \omega_{p,r}^* \left(\sum_i \dot{a}_i E_{pi}^{1*} + \sum_{ij} \dot{a}_i a_j E_{pij}^{2*} + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) \\
&\quad + 2\dot{\varepsilon} \cdot \sum_{p=1}^3 \omega_{p,r}^* \left(\vec{F}_p^1 + \sum_i a_i \vec{F}_{pi}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \vec{F}_{pij}^3 \right) \\
&\quad - 2 \sum_{p,s=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left(\sum_i a_i E_{psi}^2 + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j E_{psij}^3 - \sum_{i,j} a_i a_j E_{psij}^3 \right) \\
&\quad - \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left(\sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j E_{pij}^{2*} + 2 \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k E_{pijk}^{3*} \right) \\
&\quad - 2\dot{\varepsilon} \cdot \sum_{p=1}^3 \frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_r} \left(\sum_i \dot{a}_i \vec{F}_{pi}^2 + 2 \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j \vec{F}_{pij}^3 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2q \frac{\partial}{\partial \alpha_r} \left[(\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_3) \left(\sum_i a_i \alpha_i^c + Hl^c \right) \right] \\
& - (\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_3) \left(\sum_i a_i \alpha_i^s + Hl^s \right) \\
& + \frac{2g}{\rho} (M_r h_r + M_l h_l) \frac{\partial}{\partial \alpha_r} (\cos \alpha_1 \cos \alpha_2) + \frac{2M_r}{\rho}.
\end{aligned} \tag{18}$$

Систему рівнянь руху з параметрами a_i , ε_i , α_i доповнено узагальненими дисипативними силами, визначеними на основі результатів робіт [2, 3]. При цьому в рівняннях величини ε_i вважаємо скінченними, а α_i і a_i утримано з точністю до величин третього порядку малості включно. Система складається з $N + 6$ рівнянь другого порядку, де N — число прийнятих до розгляду форм коливань вільної поверхні рідини, при наявності шести степенів вільності резервуара як тіла-носія.

У рівняннях (16)–(18) позначено через δ_{ij} символ Кронекера,

$$\omega_p^{(k)} = - \sum_{n=1}^3 \dot{\alpha}_n \frac{\partial \omega_p}{\partial \alpha_n}, \quad \omega_{p,k}^* = \frac{\partial \omega_p}{\partial \alpha_k} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \omega_p}{\partial \dot{\alpha}_k} \right).$$

Індексні коефіцієнти, що входять у ці рівняння, є квадратурами від виразів, які включають ψ_i і $\vec{\Omega}_0$, їхніх добутків і певних похідних. Повну форму цих коефіцієнтів рівнянь наведено в [6].

Сукупність рівнянь (16)–(18) можна розглядати як дискретну модель системи резервуар–рідина з вільною поверхнею. Нагадаємо, що при побудові цієї нелінійної моделі використано такі припущення.

1. Припускали, що рідина ідеальна однорідна нестислива і в початковий момент часу її вихровий рух відсутній, тому при потенціальності зовнішніх сил рух рідини і надалі буде потенціальним.
2. Область, яку займає рідина, має циліндричну форму і основний рух відбувається в околі вертикального розташування циліндричного резервуара (вимог на геометрію поперечного перерізу циліндра не накладено).
3. Кутовий рух резервуара (кути і кутові швидкості) є малим.
4. Амплітудні параметри руху вільної поверхні рідини вважали малими і в розв'язуючих рівняннях утримувалися члени до третього порядку малості включно.

При виконанні наведених припущень рівняння (16)–(18) є найбільш загальною формою динамічної моделі руху системи резервуар–рідина з вільною поверхнею, які використовують для опису поведінки рідини коефіцієнти розкладів у ряд збурень вільної поверхні рідини за формами вільних коливань рідини (амплітудні параметри) і поліноміальне представлення нелінійностей. Вказаний перелік обмежень є типовим при використанні аналітичних методів дослідження задач цього класу.

У межах цього методу для коефіцієнтів рівнянь збуреного руху вдається побудувати явні аналітичні вирази через квадратури від функцій ψ_i і $\vec{\Omega}_0$ для довільної кількості форм коливань рідини, що створює значні переваги для комп'ютерної реалізації алгоритму. Зауважимо, що рівень вимог до обчислювальної техніки при реалізації цього методу

в порівнюваних випадках на декілька порядків нижчий, ніж при використанні методів поточної дискретизації за просторовими вимірами.

Об’єкт дослідження. Розглянемо циліндричний резервуар кругового поперечного перерізу, який частково заповнений рідиною. Вважаємо, що резервуар закріплений на маятниковому підвісі довжиною l . Ставимо задачу дослідити прояв різних резонансів у такій системі. При обчисленні коефіцієнтів динамічної моделі (16) – (18) використовували такі координатні функції і потенціал Стокса – Жуковського [1, 6]:

$$\psi_n(r, \theta) = J_n \left(\frac{\kappa_n^{(m)}}{R} r \right) \frac{\sin n\theta}{\cos n\theta}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, \dots,$$

$$\Omega_{0x} = -A \sin \theta, \quad \Omega_{0y} = A \cos \theta, \quad \Omega_{0z} = 0,$$

$$A = 4R^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\operatorname{ch} \frac{\kappa_n z}{R} - \operatorname{ch} \frac{\kappa_n (z+H)}{R} \right] J_1 \left(\frac{\kappa_n r}{R} \right)}{\kappa_n (\kappa_n^2 - 1) \operatorname{sh} \frac{\kappa_n H}{R} J_1(\kappa_n)}.$$

Для подальшого вивчення динамічних процесів у системі резервуар – рідина при кутових рухах тіла-носія в режимі сумісного руху складових системи спочатку дослідимо як сумісність впливає на частоти. Для цього запишемо рівняння сумісного руху системи межах лінійної моделі з утриманням у рівняннях лише першої антисиметричної форми коливань рідини. Зауважимо одразу, що на лінійному рівні лише антисиметричні форми коливань (коловий номер $n = 1$) беруть участь у взаємодії з рухомим тілом. Форми коливань із іншими коловими номерами в такій взаємодії участі не беруть, оскільки збудження руху за цими формами не приводить до зміни розташування центру мас рідини. Для цього запишемо лінеаризовану систему рівнянь:

$$\ddot{a}_1 + \frac{1}{\alpha_1^v} \ddot{\varepsilon}_x B_{1x}^1 + \frac{1}{\alpha_1^v} \ddot{\alpha}_2 E_{11}^{1*} + \omega_1^2 = 0,$$

$$\frac{\rho}{M_r + M_l} \ddot{a}_1 B_{1x}^1 + \ddot{\varepsilon}_x + \frac{\rho}{M_r + M_l} \ddot{\alpha}_2 F_2^1 = 0,$$

$$\ddot{a}_1 E_{11}^{1*} + 2\ddot{\varepsilon}_x F_2^1 + 2\ddot{\alpha}_2 \left(\frac{1}{\rho} J_{res}^{22} + E_{11}^2 \right) + \alpha_2 \frac{2g}{\rho} \left[M_r \left(l + \frac{H}{4} \right) + M_l \left(l + \frac{H}{2} \right) \right] = 0.$$

Якщо припустити, що в системі рух відбувається без врахування сумісності руху складових, то можна одержати наступні парціальні частоти коливань (поєдновано для рідини, поступального руху резервуара і кутового руху резервуара):

$$\omega_a^p = \sqrt{\frac{\kappa_1 g}{R} \tanh \frac{\kappa_1 H}{R}}, \quad \omega_\varepsilon^p = 0, \quad \omega_\alpha^p = \sqrt{\frac{M_r h_r + M_l h_l}{J_{res}^{11}}}.$$

Проте для визначення власних частот коливань системи в режимі сумісного руху резервуара і рідини слід використовувати таке характеристичне рівняння для визначення

Таблиця 1

1	2	3	4	5
$l = R$	4,14431	2,47842	2,24312 6,69986	2,26729 16,63085
$l = 2R$	4,14431	1,96189	1,85304 6,10821	1,86112 12,45135
$l = 8R$	4,14431	1,07442	1,05895 5,52733	1,05934 9,75099

власних частот λ , яке впливає з лінеаризованої системи

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 - \omega_1^{p2} & \frac{1}{\alpha_1^v} B_{1x}^1 \lambda^2 & \frac{1}{\alpha_1^v} E_{22}^{1*} \lambda^2 \\ \frac{\rho}{M_r + M_l} B_{1x}^1 \lambda^2 & \lambda^2 & \frac{\rho}{M_r + M_l} F_2^1 \lambda^2 \\ E_{22}^{1*} \lambda^2 & 2F_2^1 \lambda^2 & R_\alpha \end{vmatrix} = 0,$$

де

$$R_\alpha = 2 \left(\frac{1}{\rho} J_{res}^{22} + E_{11}^2 \right) + \frac{2g}{\rho} \left[M_r \left(l + \frac{H}{4} \right) + M_l \left(l + \frac{H}{2} \right) \right].$$

У випадку лише поступального руху резервуара частота резонансу збільшується згідно з формулою (вираз у знаменнику завжди більше нуля і менше одиниці), де ω і ω_0 — відповідно власна і парціальна частоти

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2}{1 - \frac{\rho (B_{1x}^1)^2}{\alpha_1^x (M_l + M_r)}}.$$

Наведемо деякі числові результати визначення частот сумісних коливань, які одержано для випадку $M_r = 0,1M_l$ для різних довжин маятникового підвісу резервуара і при $R = 1$ м.

В табл. 1 по колонках наведено: 1 — значення довжини підвісу резервуара, 2 — частота парціальних коливань по першій антисиметричній формі, 3 — парціальна частота маятникових коливань резервуара для нерухомої точки підвісу, 4 — частоти сумісних коливань резервуара і рідини для випадку точки підвісу маятника, що рухається за заданим законом (верхнє значення відповідає руху, близькому до маятникових коливань, а нижнє — близькому до коливань вільної поверхні рідини), 5 — частоти для повністю зв'язаної задачі у випадку, коли рух точки підвісу наперед не задається (як і в попередньому випадку, верхнє значення відповідає руху близькому до маятникових коливань, нижнє — близькому до коливань вільної поверхні рідини).

Як свідчать числові дані частоти сумісних коливань системи для маятникових коливань мають тенденцію до незначного зменшення, а частоти коливань рідини сильно збільшуються (від 23% до 400%), що відповідає результатам теореми про зміну частот у механічних системах при переході до сумісних коливань (частоти коливань системи в сумісному русі мають знаходитися поза межами або на межі відрізка, утвореного парціальними частотами). Така суттєва зміна частот коливань рідини в режимі зв'язаних коливань у системі

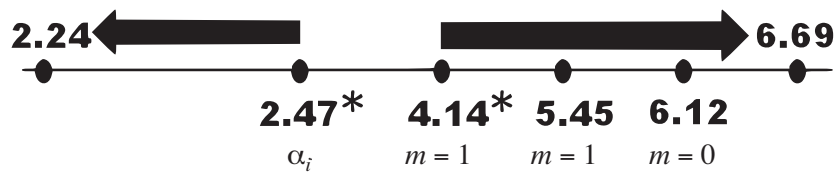


Рис. 2. Схема розташування парціальних і власних частот.

показує, що ігнорування фактора сумісності коливань складових системи є некоректним. На лінійному рівні буде відбуватися зміна лише для частот коливань, які відповідають антисиметричним (коловий номер $n = 1$) формам. Водночас частоти коливань рідини за формами з коловим номером, відмінним від 1, не будуть змінюватися при переході до режиму сумісного руху системи. Тому значна зміна частот сумісних коливань антисиметричних форм може привести до зміни порядку розташування форм коливань у режимі сумісних коливань при порівнянні з випадком заданого руху резервуара, якщо розташувати форми коливань у порядку зростання частот. В підсумку це призведе до зміни пріоритетності прояву окремо взятих резонансів, оскільки в основному інтенсивність прояву резонансів суттєво спадає зі зростанням частот (у резонансах із меншими резонансними частотами зосереджується більше енергії). Покажемо це на рис. 2, де для випадку заданого руху точки підвісу і довжини маятникового підвісу наведено тенденцію зміни частот від парціальних до сумісних із відображенням їхнього розташування на числовій осі.

Характерною особливістю розвинення процесів в околі резонансних частот маятникових коливань резервуара для резервуарів із рідиною є різне розвинення процесів для частот, не значно менших за резонансні, для частот у безпосередньому околі резонансу і частот, які перевершують резонансні. Такі явища спостерігали для випадку поступального і кутового руху при маятниковому підвісі з фіксованою точкою підвісу при силовому збудженні коливань. Наведемо тепер результати при заданому кінематичному збуренні руху точки підвісу в горизонтальному напрямку. Результати показано на рис. 3 – 5, де наведено зміну амплітуд коливань рідини на стінці резервуара. Загальна тенденція поведінки системи не змінилася у порівнянні з маятниковим підвісом із фіксованою точкою підвісу і випадком поступального руху тіла-носія. Так, у дорезонансному діапазоні з'являються дрейф середнього значення коливань, значний прояв вищих гармонік спектра, практично відсутня модуляція коливань. У біларезонансному режимі в додаток до ефектів у дорезонансному режимі ще виникає прояв модуляції. У зарезонансному режимі прояв дрейфу середнього значення практично відсутній, прояв модуляції підсилюється. Прояв вищих гармонік стає слабшим. Загальна тенденція розвинення коливань у випадку маятникового підвісу в порівнянні з чисто поступальним рухом проявляється у зменшенні збудження осесиметричних форм, що в підсумку послаблює ефект перевернення горбів хвиль над глибиною впадини. При розташуванні частот за зростанням цей резонанс є першим і такий, що найбільш гостро проявляється і найшвидше розвивається при початковому збуренні системи.

За ступенем зростання частот другим є резонанс за формою $n = 2$. Такий резонанс є нелінійним, оскільки в лінійній моделі такий резонанс відсутній. Проте на частоті форми, яка відповідає $n = 2$, розвивається резонанс, у якому ця форма відіграє фактично роль каталізатора або каналу провідника енергії від коливань резервуара через форму $n = 2$ до антисиметричної форми $n = 1$ (рис. 6). При цьому при такому резонансі в прикладах розрахунків амплітуди хвиль за формою $n = 2$ не перевершують $0,05R$, саме тоді як коливання за формою $n = 1$ відбуваються на рівні $0,3R$. Такий канал поширення енергії

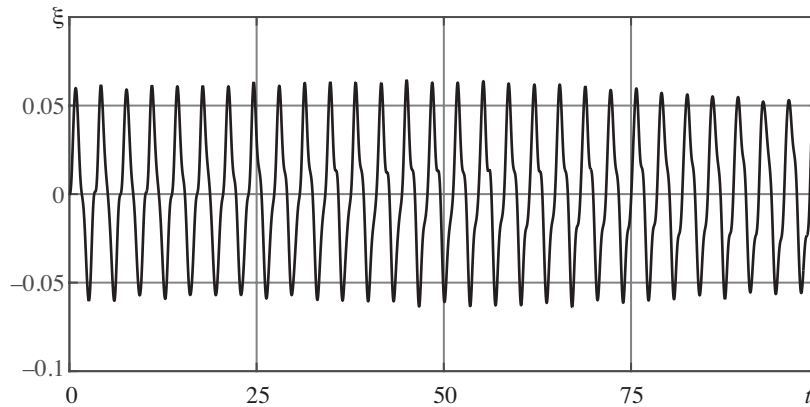


Рис. 3. Збурення вільної поверхні рідини в дорезонансному випадку.

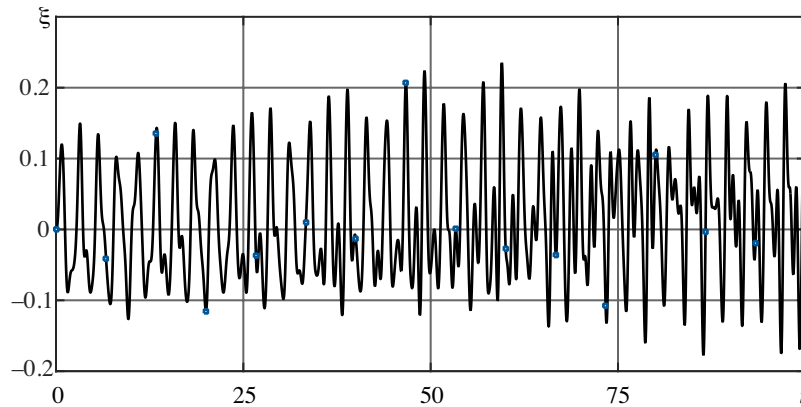


Рис. 4. Збурення вільної поверхні рідини в біarezонансному випадку.

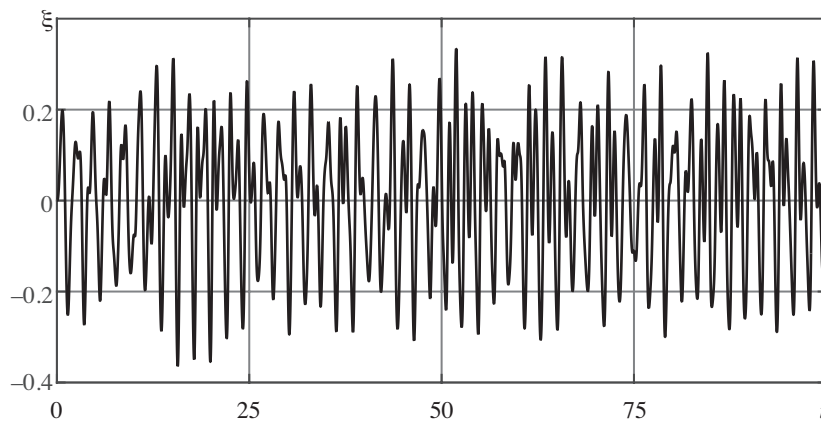


Рис. 5. Збурення вільної поверхні рідини в зарезонансному випадку.

обумовлений нелінійними членами в рівняннях руху. Важливо відзначити, що такий резонанс спостерігаємо приблизно до довжин підвісу $l > 8R$, і при подальшому зростанні довжини підвісу форма $n = 2$ поступається формі $n = 1$ в розташуванні на другому місці.

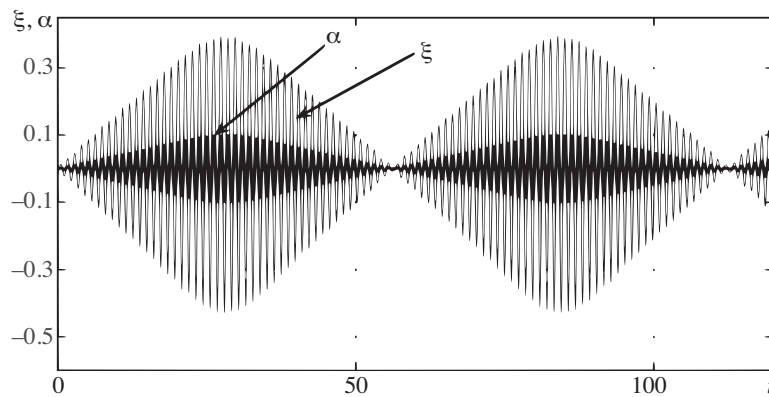


Рис. 6. Збурення вільної поверхні рідини при нелінійному вторинному резонансі і кут відхилення підвісу α .

У системах резервуар – рідина на маятниковому підвісі при коротких довжинах підвісу незвичним є те, що вихід на резонанс за формою $n = 1$ фактично не спостерігається, оскільки цей резонанс тепер за порядком зростання частот є четвертим. Водночас вихід на третій резонанс за формою $n = 0$ теж практично не проявляється. Єдиний спосіб, коли вдається проявити такий резонанс, пов'язаний із спеціальним підбором довжини маятникового підвісу, коли вдається досягти рівності частот за формами $n = 0$ і $n = 1$ (таке реалізується на частоті 6,12). Цей варіант докладно досліджено в роботі [10]. Зазначимо, що в такому резонансі коливання резервуара і вільної поверхні за формою $n = 1$ встановлюються майже відразу. Проте через приблизно 25 періодів коливань починають інтенсивно зростати коливання за формою $n = 0$. Такий резонанс на лінійному рівні взагалі відсутній, тому його слід вважати нелінійним, вторинним. Залежно від довжини маятникового підвісу поведінку системи резервуар – рідина з вільною поверхнею можна розбити на такі три діапазони. Перший діапазон (великі довжини підвісу), коли частота антисиметричної форми коливань буде менше 5,45 і займатиме друге місце після частоти маятникових коливань. Другий діапазон (середні довжини підвісу), коли частота антисиметричної форми коливань буде знаходитися в інтервалі від 5,45 до 6,12, тобто буде на третьому місці. І третій діапазон (короткі довжини підвісу), коли частота антисиметричної форми коливань буде більше 6,12 (четверте місце в порядку зростання частот). Виходячи з відомих властивостей прояву резонансних процесів залежно від положення резонансних частот у загальному ряду власних частот коливань слід очікувати різні тенденції поведінки системи для різних довжин підвісів резервуара. Важливо, що частина цих резонансів є виключно нелінійними, але з точки зору черговості частот, обумовлених переважно впливом сумісності руху складових компонент, вони є суттєвими. В усіх режимах руху і типах резонансів суттєвим є врахування коливань на власних частотах усіх форм, які беруться до уваги на нелінійному рівні, в підсумку через трансцендентні співвідношення між цими частотами вихід на усталений режим коливань не спостерігається [12].

Загальною тенденцією прояву всіх типів резонансів є те, що всі резонанси, які відбуваються на різних частотах, проявляються через збудження коливань за маятковою формою і першою антисиметричною формою $n = 1$, проте в частині випадків така концентрація енергії в цій формі відбувається на основі нелінійних механізмів енергообміну.

Висновки. У роботі досліджено нелінійну динаміку руху системи резервуар – рідина з вільною поверхнею при кутових рухах резервуара. Постановку задачі виконано на основі варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського. З позицій аналітичної механіки

вивчено всі кінематичні в'язі задачі, до яких додатково ще включено умову розв'язуваності крайової задачі Неймана. Реалізовано метод аналітичного виключення всіх в'язей задачі для довільної кількості координатних функцій, що використовуються для побудови наближеного розв'язку задачі. Одержано нелінійну динамічну модель задачі за умови сумісності руху складових механічної системи. Показано, що у випадку кутових рухів резервуара з рідиною на маятниковому підвісі суттєво змінюється частотний спектр задачі, причому на різних довжинах підвісу спостерігається зміна черговості розташування форм коливань при їхньому розміщенні за зростанням частот. У підсумку це веде до зміни пріоритетності в прояві резонансів. Проаналізовано розвинення резонансів при збудженні коливань за формою, близькою до маятникових коливань резервуара, а також два типи нелінійних вторинних резонансів. Відмічено, що для коротких маятникових підвісів резонанс на частоті коливань за першою формою не проявляється, оскільки ця частота стає четвертою за величиною. При дослідженні процесів в околі резонансів у моделі важливим був прояв коливань на власних частотах усіх форм коливань, які утримувалися в рамках нелінійної моделі. В підсумку це приводить до трансцендентних співвідношень між частотами i , як наслідок, обумовлює відсутність ustalених режимів коливань у системі резервуар – рідина з вільною поверхнею.

Автор заявляє про відсутність конфлікту інтересів. Усі необхідні дані містяться в статті. Автор заявляє про відсутність спеціального фінансування цієї роботи.

Література

1. К. А. Абгарян, И. М. Раппопорт, *Динамика ракет*, Машиностроение, Москва (1969).
2. Г. Н. Микишев, Б. И. Рабинович, *Динамика твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью*, Машиностроение, Москва (1968).
3. Г. Н. Микишев, *Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов*, Машиностроение, Москва (1978).
4. Г. С. Нариманов, Л. В. Докучаев, И. А. Луковский, *Нелинейная динамика летательного аппарата с жидкостью*, Машиностроение, Москва (1977).
5. R. A. Ibrahim, *Liquid sloshing dynamics: theory and applications*, Cambridge University Press, Cambridge (2005).
6. О. С. Лимарченко, В. В. Ясинский, *Нелинейная динамика конструкций с жидкостью*, Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут", Київ (1997).
7. И. А. Луковский, *Введение в нелинейную динамику твердого тела с полостями, содержащими жидкость*, Наукова думка, Киев (1990).
8. O. M. Faltinsen, O. M. Rognebakke, A. N. Timokha, *Transient and steady-state amplitudes of resonant three-dimensional sloshing in a square base tank with a finite fluid depth*, Phys. Fluids, **18**, № 1, 1 – 14 (2006).
9. P. Pal, *Sloshing of liquid in partially filled container-an experimental study*, Int. J. Recent Trends Eng., **1**, № 6, 1 – 5 (2009).
10. O. S. Limarchenko, K. O. Semenovich, *Energy redistribution between the reservoir and liquid with free surface for angular motions of the system*, J. Math. Sci., **222**, № 3, 296 – 303 (2017).
11. M. La Rocca, P. Mele, V. Armenio, *Variational approach to the problem of sloshing*, J. Theor. Appl. Fluid Mech., **1**, № 4, 280 – 310 (1997).
12. M. Onorato, L. Vozella, D. Proment, V. Lvov, *Route to thermalization in the Fermi – Pasta – Ulam system*, Proc. Nat. Acad. Sci., **112**, № 14, 4208 – 4213 (2015).

Одержано 14.07.23,
після доопрацювання — 04.12.23