

DOI: 10.3842/nosc.v26i3.1447

УДК 511.7+517.5+519.21

НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІЇ З ЛОКАЛЬНО СКЛАДНИМИ ТА ФРАКТАЛЬНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ, ПОВ'ЯЗАНІ З НЕСКІНЧЕНОСИМВОЛЬНИМ B -ЗОБРАЖЕННЯМ ЧИСЕЛ

Микола Працьовитий

Інститут математики НАН України

вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна

Український державний університет імені Михайла Драгоманова

вул. Пирогова, 9, Київ, 01054, Україна

e-mail: prats4444@gmail.com, відповідальний за листування

Ольга Бондаренко, Ірина Лисенко

Український державний університет імені Михайла Драгоманова

вул. Пирогова, 9, Київ, 01054, Україна

e-mail: prats4444@gmail.com,

o.i.bondarenko@udu.edu.ua,

i.m.lysenko@npu.edu.ua

Софія Ратушняк

Інститут математики НАН України

вул. Терещенківська, 3, Київ, 01024, Україна

Український державний університет імені Михайла Драгоманова

вул. Пирогова, 9, Київ, 01054, Україна

e-mail: ratush404@gmail.com

We introduce and study a massive class of continuous functions defined on the interval $(0; 1)$ using a special encoding (representation) of the argument with an alphabet $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$:

$$x = b_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^m b_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} \Theta_{\alpha_i} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}^B(\emptyset),$$
$$x = b_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} b_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} \Theta_{\alpha_i} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^B,$$

where $\alpha_n \in Z$, $\Theta_n > 0 \ \forall n \in Z$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Theta_n = 1$, $b_{n+1} \equiv \sum_{i=-\infty}^{n-1} = b_n + \Theta_n \ \forall n \in Z$.

© Микола Працьовитий, Ольга Бондаренко, Ірина Лисенко, Софія Ратушняк, 2023

408

ISSN 1562-3076. Нелінійні коливання, 2023, т. 26, № 3

The function f , which is the main object of the study, is defined by the equalities

$$\begin{cases} f(x = \Delta_{i_1 \dots i_k \dots}^B) = \sigma_{i_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} \sigma_{i_k k} \prod_{j=1}^{k-1} p_{i_j j} \equiv \Delta_{i_1 \dots i_k \dots}, \\ f(x = \Delta_{i_1 \dots i_m(\emptyset)}^B) = \sigma_{i_1 1} + \sum_{k=2}^m \sigma_{i_k k} \prod_{j=1}^{k-1} p_{i_j j} \equiv \Delta_{i_1 \dots i_m(\emptyset)}, \end{cases}$$

where the infinite matrix $\|p_{ik}\|$, $i \in Z$, $k \in N$, satisfies the conditions

- 1) $|p_{ik}| < 1 \quad \forall i \in Z, \forall k \in N$;
- 2) $\sum_{i \in Z} p_{ik} = 1 \quad \forall k \in N$;
- 3) $0 < \sum_{k=2}^{\infty} \prod_{j=1}^{k-1} p_{i_j j} < \infty \quad \forall (i_j) \in L$;
- 4) $0 < \sigma_{ik} \equiv \sum_{j=-\infty}^{i-1} p_{jk} < 1 \quad \forall i \in Z, \forall k \in N$.

This class of functions contains monotonic, nonmonotonic, nowhere monotonic functions and functions without monotonicity intervals except for constancy intervals, Cantor-type and quasi-Cantor-type functions as well as functions of bounded and unbounded variation. Criteria for the function f to be monotonic and a Cantor-type function as well as a criterion of nowhere monotonicity of this function are proved. We find expressions for the Lebesgue measure of a set of non-constancy of the function and for the variation of the function. We establish necessary and sufficient conditions for the function to have an unbounded variation. In the particular case, we describe the self-similarity (structural fractality) of the graph of this function and study its differential properties.

Вводиться і вивчається масивний клас неперервних функцій, визначених на інтервалі $(0; 1)$ з використанням спеціального кодування (зображення) аргументу з алфавітом $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$:

$$\begin{aligned} x &= b_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^m b_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} \Theta_{\alpha_i} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m(\emptyset)}^B, \\ x &= b_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} b_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} \Theta_{\alpha_i} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^B, \end{aligned}$$

де $\alpha_n \in Z$, $\Theta_n > 0 \quad \forall n \in Z$, $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Theta_n = 1$, $b_{n+1} \equiv \sum_{i=-\infty}^{n-1} b_i = b_n + \Theta_n \quad \forall n \in Z$.

Функцію f , що є основним об'єктом дослідження, означуємо рівностями

$$\begin{cases} f(x = \Delta_{i_1 \dots i_k \dots}^B) = \sigma_{i_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} \sigma_{i_k k} \prod_{j=1}^{k-1} p_{i_j j} \equiv \Delta_{i_1 \dots i_k \dots}, \\ f(x = \Delta_{i_1 \dots i_m(\emptyset)}^B) = \sigma_{i_1 1} + \sum_{k=2}^m \sigma_{i_k k} \prod_{j=1}^{k-1} p_{i_j j} \equiv \Delta_{i_1 \dots i_m(\emptyset)}, \end{cases}$$

де нескінченна матриця $\|p_{ik}\|$, $i \in Z$, $k \in N$, задовольняє умови:

- 1) $|p_{ik}| < 1 \quad \forall i \in Z, \forall k \in N$;
- 2) $\sum_{i \in Z} p_{ik} = 1 \quad \forall k \in N$;
- 3) $0 < \sum_{k=2}^{\infty} \prod_{j=1}^{k-1} p_{i_j j} < \infty \quad \forall (i_j) \in L$;
- 4) $0 < \sigma_{ik} \equiv \sum_{j=-\infty}^{i-1} p_{jk} < 1 \quad \forall i \in Z, \forall k \in N$.

Серед функцій цього класу є монотонні, немонотонні, ніде немонотонні і такі, що не мають проміжків монотонності окрім проміжків сталості, функції канторівського і квазіканторівського типів, функції обмеженої та необмеженої варіації. Обґрунтовано критерії монотонності та канторовості функції f , а також критерій її ніде немонотонності. Одержано вирази міри Лебега множини несталості функції та варіації функції. Встановлено необхідні й достатні умови, за яких функція має необмежену варіацію. Для частинного випадку описано автомодельність (структурну фрактальність) графіка функції і вивчено її диференціальні властивості.

1. Вступ. Неперервні нїде не монотонні, зокрема недиференційовні, сингулярні функції (монотонні, немонотонні, нїде не монотонні окрім проміжків сталості), а також функції необмеженої варіації ми відносимо до класу локально складних [1]. Вивченню одного нескінченнопараметричного класу $P(B)$ таких функцій присвячено цю роботу.

Зрозуміло, що аналітично задати локально складну функцію виразом зі скінченною кількістю простих бінарних операцій практично не можливо [2–5]. Тому з цією метою для зображення аргументу ми використовуємо одне нескінченносимвольне зображення (кодування) чисел інтервалу $(0; 1)$ з алфавітом $A = Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, визначене нескінченною двосторонньою збіжною і нормованою послідовністю додатних дійсних чисел (Θ_n) . Значення функції визначає нескінченна матриця $\|p_{ik}\|$, $i \in Z$, $k \in N$, яка задовольняє ряд вимог.

2. В-зображення чисел. Нехай $A = Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ — алфавіт (набір цифр), $L = A \times A \times \dots$ — простір послідовностей елементів алфавіту; (Θ_n) — довільна послідовність додатних дійсних чисел $n \in Z$ така, що

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_{-n} \equiv u < 1, \quad 0 < \sum_{n=0}^{+\infty} \Theta_n \equiv v < 1, \quad u + v = 1.$$

Прикладом такої є двостороння послідовність (Θ_n) : $\Theta_0 = \frac{1-3a}{1-a}$, $\Theta_{-n} = \Theta_n = a^n$, де параметр a задовольняє нерівності $0 < a < \frac{1}{3}$, $n \in N$, зокрема $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ [6].

Сформуємо іншу двосторонню послідовність (b_n) , визначену послідовністю (Θ_n) :

$$b_n \equiv \sum_{i=-\infty}^{n-1} \Theta_i = b_{n-1} + \Theta_{n-1}.$$

Теорема 1. Для будь-якого числа $x \in (0; 1)$ існує єдиний скінченний набір цілих чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ або єдина послідовність $(\alpha_n) \in L$ такі, що виконується одна з рівностей

$$x = b_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^m b_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} \Theta_{\alpha_i} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}^B(\emptyset), \quad (1)$$

$$x = b_{\alpha_1} + \sum_{k=2}^{\infty} b_{\alpha_k} \prod_{i=1}^{k-1} \Theta_{\alpha_i} \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^B. \quad (2)$$

Доведення. Існування. Оскільки

$$(0; 1) = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} [b_n; b_{n+1}),$$

то очевидно, що існує $\alpha_1 \in A$ таке, що $b_{\alpha_1} \leq x < b_{\alpha_1+1}$.

Якщо $x = b_{\alpha_1}$, то отримано розклад (1) і $x = \Delta_{\alpha_1}^B(\emptyset)$.

Якщо $x \neq b_{\alpha_1}$, тобто $b_{\alpha_1} < x < b_{\alpha_1+1}$, то $0 < x - b_{\alpha_1} \equiv x_1 < b_{\alpha_1+1} - b_{\alpha_1} = \Theta_{\alpha_1}$ і $x = b_{\alpha_1} + x_1$.

Розглянемо число $x_1 \in (0; \Theta_{\alpha_1})$. Оскільки

$$(0; \Theta_{\alpha_1}) = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} [b_n \Theta_{\alpha_1}; b_{n+1} \Theta_{\alpha_1}),$$

то очевидно, що існує $\alpha_2 \in A$ таке, що $b_{\alpha_2} \Theta_{\alpha_1} \leq x_1 < b_{\alpha_2+1} \Theta_{\alpha_1}$.

Якщо $x_1 = b_{\alpha_2} \Theta_{\alpha_1}$, то $x = b_{\alpha_1} + x_1 = b_{\alpha_1} + b_{\alpha_2} \Theta_{\alpha_1} = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2}^B(\emptyset)$.

Якщо $x_1 \neq b_{\alpha_2} \Theta_{\alpha_1}$, тобто $b_{\alpha_2} \Theta_{\alpha_1} < x_1 < b_{\alpha_2+1} \Theta_{\alpha_1}$, то

$$0 < x_1 - b_{\alpha_2} \Theta_{\alpha_1} \equiv x_2 < b_{\alpha_2+1} \Theta_{\alpha_1} - b_{\alpha_2} \Theta_{\alpha_1} = \Theta_{\alpha_2} \Theta_{\alpha_1} \quad \text{і} \quad x_1 = b_{\alpha_2} \Theta_{\alpha_1} + x_2.$$

Далі аналогічні міркування продовжуємо стосовно числа x_2 .

Оскільки

$$x_2 \in (0; \Theta_{\alpha_1} \Theta_{\alpha_2}) = \bigcup_{n=-\infty}^{\infty} [b_n \Theta_{\alpha_1} \Theta_{\alpha_2}; b_{n+1} \Theta_{\alpha_1} \Theta_{\alpha_2}),$$

то існує $\alpha_3 \in A$ таке, що $b_{\alpha_3} \Theta_{\alpha_1} \Theta_{\alpha_2} \leq x_2 < b_{\alpha_3+1} \Theta_{\alpha_1} \Theta_{\alpha_2}$.

Якщо $x_2 = b_{\alpha_3} \Theta_{\alpha_1} \Theta_{\alpha_2}$, то

$$x = b_{\alpha_1} + x_1 = b_{\alpha_1} + b_{\alpha_2} \Theta_{\alpha_1} + x_2 = b_{\alpha_1} + b_{\alpha_2} \Theta_{\alpha_1} + b_{\alpha_3} \Theta_{\alpha_1} \Theta_{\alpha_2} = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}^B(\emptyset).$$

Якщо ж $x_2 \neq b_{\alpha_3} \Theta_{\alpha_1} \Theta_{\alpha_2}$, то $0 \leq x_2 - b_{\alpha_3} \Theta_{\alpha_1} \Theta_{\alpha_2} \equiv x_3 < \Theta_{\alpha_1} \Theta_{\alpha_2} \Theta_{\alpha_3}$.

Аналогічно міркуємо стосовно x_3 .

Так за скінченну кількість кроків отримуємо

$$\begin{aligned} x &= b_{\alpha_1} + x_1 = b_{\alpha_1} + b_{\alpha_2} \Theta_{\alpha_1} + x_2 \\ &= \dots = b_{\alpha_1} + b_{\alpha_2} \Theta_{\alpha_1} + b_{\alpha_3} \Theta_{\alpha_1} \Theta_{\alpha_2} + \dots + b_{\alpha_m} \Theta_{\alpha_1} \Theta_{\alpha_2} \dots \Theta_{\alpha_{m-1}} = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}^B(\emptyset). \end{aligned}$$

Якщо ж при будь-якому m :

$$x = b_{\alpha_1} + b_{\alpha_2} \Theta_{\alpha_1} + b_{\alpha_3} \Theta_{\alpha_1} \Theta_{\alpha_2} + \dots + b_{\alpha_m} \Theta_{\alpha_1} \Theta_{\alpha_2} \dots \Theta_{\alpha_{m-1}} + x_m,$$

де $x_m \neq 0$, то з того, що $\Theta_j \leq M \equiv \max\{\Theta_i, i \in Z\} < 1$, для будь-якого $j \in Z$ маємо

$$x_m < \prod_{i=1}^{m-1} \Theta_{\alpha_i} \leq M^{m-1} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

Звідки робимо висновок про збіжність процесу розкладу числа x у суму (1) або ряд (2).

Єдиність. Доведемо, що числа з формально різними розкладами рівними бути не можуть. Розглянемо всі можливі випадки:

- 1) $x_1 = \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}^B$, $x_2 = \Delta_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_n}^B$;
- 2) $x_1 = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^B(\emptyset)$, $x_2 = \Delta_{\beta_1 \dots \beta_m}^B(\emptyset)$;
- 3) $x_1 = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^B(\emptyset)$, $x_2 = \Delta_{\beta_1 \dots \beta_m \dots \beta_k}^B(\emptyset)$.

У перших двох випадках можна скористатися спільними міркуваннями. Нехай виконується 1). Оскільки їхні зображення формально різні, то існує m таке, що $\alpha_m \neq \beta_m$, але $\alpha_i = \beta_i$, коли $i < m$. Задля конкретності, нехай $\alpha_m < \beta_m$.

Розглянемо різницю $x_2 - x_1 = C \prod_{i=1}^{m-1} \Theta_{\alpha_i}$, де

$$C \equiv b_{\beta_m} - b_{\alpha_m} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{\beta_{m+k}} \prod_{i=0}^{k-1} \Theta_{\beta_{m+i}} - \sum_{k=1}^{\infty} b_{\alpha_{m+k}} \prod_{i=0}^{k-1} \Theta_{\alpha_{m+i}}.$$

Оскільки $b_{\beta_m} - b_{\alpha_m} = \Theta_{\alpha_m} + \Theta_{\alpha_{m+1}} + \dots + \Theta_{\beta_{m-1}} \geq \Theta_{\alpha_m}$,

$$0 < b_{\beta_{m+1}} \Theta_{\beta_m} < \sum_{k=1}^{\infty} b_{\beta_{m+k}} \prod_{i=0}^{k-1} \Theta_{\beta_{m+i}} < \Theta_{\beta_m} \cdot 1,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_{\alpha_{m+k}} \prod_{i=0}^{k-1} \Theta_{\alpha_{m+i}} < \sum_{k=1}^{\infty} b_{\alpha_{m+k}} \prod_{i=0}^{k-1} \Theta_{\alpha_{m+i}} < \Theta_{\alpha_m} \cdot 1,$$

то

$$C \geq (\Theta_{\alpha_m} + \Theta_{\alpha_{m+1}}) + \dots + \Theta_{\beta_{m-1}} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{\beta_{m+k}} \prod_{i=0}^{k-1} \Theta_{\beta_{m+i}} - \Theta_{\alpha_m} > 0.$$

Отже, $x_2 > x_1$.

У випадку 2), коли $\alpha_n < \beta_n$, але $\alpha_i = \beta_i$ при $i < n < m$, тоді аналогічно до випадку 1) обґрунтовуємо нерівність $x_1 < x_2$.

У випадку 3) можливі підвипадки.

3.1) Якщо $\alpha_i = \beta_i$ для всіх $i \leq m$, то

$$x_2 - x_1 = \sum_{i=m+1}^k b_{\beta_i} \prod_{j=1}^{i-1} \Theta_{\beta_j} > 0.$$

3.2) Нехай існує $\alpha_n \neq \beta_n$, але $\alpha_i = \beta_i$ при $i < n \leq m$. Розглянемо число $x_3 = \Delta_{\beta_1 \dots \beta_m(\emptyset)}^B$. Згідно з 3.1) $x_3 < x_2$, а згідно з 2) маємо $x_1 = x_3$ тоді й лише тоді, коли $\alpha_i = \beta_i$ для всіх $i \leq m$. Тому при $\alpha_n < \beta_n$ одержуємо $x_1 < x_3 < x_2$.

Нехай $\alpha_n > \beta_n$. Тоді $x_1 > x_3$. Розглянемо різницю $x_1 - x_2$. Отримуємо

$$x_1 - x_2 = C_1 \prod_{i=1}^{n-1} \Theta_{\alpha_i},$$

де

$$C_1 = b_{\alpha_n} - b_{\beta_n} + \sum_{i=1}^m b_{\alpha_{n+i}} \prod_{j=0}^{i-1} \Theta_{\alpha_{n+j}} - \sum_{i=1}^k b_{\beta_{n+i}} \prod_{j=0}^{i-1} \Theta_{\beta_{n+j}}.$$

Оскільки $b_{\alpha_n} - b_{\beta_n} \geq \Theta_{\beta_n}$,

$$0 < b_{\alpha_{n+1}} \Theta_{\alpha_n} \leq \sum_{i=1}^m b_{\alpha_{n+i}} \prod_{j=0}^{i-1} \Theta_{\alpha_{n+j}} < \Theta_{\alpha_n},$$

$$\sum_{i=1}^k b_{\beta_n+i} \prod_{j=0}^{i-1} \Theta_{\beta_n+j} < \Theta_{\beta_n},$$

то $C_1 > \Theta_{\beta_n} + 0 - \Theta_{\beta_n} = 0$ і $x_1 > x_2$.

Символічні записи числа x рівностями (1) або (2) називатимемо B -зображенням цього числа, а $\alpha_n = \alpha_n(x)$ — n -ю його цифрою. Із-за єдиності B -зображення числа, $\alpha_n(x)$ є коректно означеною функцією числа x .

Числа, для яких виконується рівність (1), називаємо B -скінченними, а ті, для яких виконується рівність (2), — B -нескінченними.

Множина всіх B -скінченних чисел є зліченною, всюди щільною у $(0; 1)$ множиною.

B -зображення є засобом кодування чисел інтервалу $(0; 1)$, їхньої ідентифікації та порівняння: числа $x = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^B$ і $y = \Delta_{\beta_1 \dots \beta_m}^B$ перебувають у відношенні $x < y$ тоді й лише тоді, коли існує $k \in N$ таке, що $\alpha_k < \beta_k$, але $\alpha_i = \beta_i$ при $i < k$.

Обґрунтування цих висновків фактично міститься у доведенні єдиності теореми 1.

3. Геометрія B -зображення чисел. Геометрію B -зображення чисел (геометричний зміст цифр, метричні відношення) достатньо повно розкривають властивості циліндричних і хвостових множин.

Означення 1. Множину $\Delta_{c_1 \dots c_m}^B$ чисел $x \in (0; 1)$, що мають скінченне або нескінченне B -зображення з першими m -цифрами $c_1, c_2, \dots, c_m$ відповідно, тобто

$$\Delta_{c_1 \dots c_m}^B = \left\{ x : x = \Delta_{c_1 \dots c_m \alpha_{m+1} \dots \alpha_n}^B(\emptyset), x = \Delta_{c_1 \dots c_m \beta_1 \beta_2 \dots}^B, (\beta_n) \in L \right\},$$

називають B -циліндром рангу m з основою $c_1 c_2 \dots c_m$.

0. Безпосередньо з означення випливає рівність $\Delta_{c_1 \dots c_m}^B = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} \Delta_{c_1 \dots c_m i}^B$.

1. Порядок слідування циліндрів визначає рівність

$$\sup \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} c_m}^B = \min \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} [c_m+1]}^B.$$

2. Циліндр $\Delta_{c_1 \dots c_m}^B$ є піввідрізком $[a; d)$ з кінцями

$$a = b_{c_1} + \sum_{k=2}^m b_{c_k} \prod_{i=1}^{k-1} \Theta_{c_i} = \Delta_{c_1 \dots c_m}^B(\emptyset), \quad d = a + \prod_{i=1}^m \Theta_{c_i} = \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} [c_m+1]}^B(\emptyset).$$

3. Довжина циліндра $|\Delta_{c_1 \dots c_m}^B| = \prod_{i=1}^m \Theta_{c_i} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$.

4. Основне метричне співвідношення

$$|\Delta_{c_1 \dots c_m i}^B| = \Theta_i |\Delta_{c_1 \dots c_m}^B|.$$

5. $\forall (c_m) \in L : \bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta_{c_1 \dots c_m}^B = \Delta_{c_1 \dots c_m \dots}^B$.

Циліндри задають систему подрібнюючих розбиттів інтервалу $(0; 1)$.

Означення 2. Кажуть, що B -зображення чисел $x = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^B$ і $y = \Delta_{\beta_1 \dots \beta_n}^B$ “мають однаковий хвіст” (символічно записують $x \sim y$), якщо існують такі натуральні числа m і k , що $\alpha_{m+j} = \beta_{k+j}$ для будь-якого $j \in N$. Вважатимемо, що B -скінченні числа мають однаковий хвіст за означенням.

Очевидно, що відношення $\sim$ є відношенням еквівалентності. Кожен із класів еквівалентності називаємо *хвостовою множиною*. Зрозуміло, що зображення всіх B -скінченних чисел належать одному класу еквівалентності.

Кожна хвостова множина є зліченною, всюди щільною у інтервалі $(0; 1)$, а множина класів еквівалентності — континуальною. Змістовні метризації хвостових множин є однією з цікавих і важливих проблем для теорії динамічних систем.

4. Об'єкт дослідження. Нехай нескінченна матриця $\|p_{ik}\|$, $i \in Z$, $k \in N$, задовольняє умови:

- 1) $|p_{ik}| < 1 \quad \forall i \in Z \quad \forall k \in N$;
- 2) $\sum_{i \in Z} p_{ik} = 1 \quad \forall k \in N$;
- 3) $0 < \sum_{k=2}^{\infty} \prod_{j=1}^{k-1} p_{ijj} < \infty \quad \forall i_j \in Z$;
- 4) $0 < \sigma_{ik} \equiv \sum_{j=-\infty}^{i-1} p_{jk} < 1 \quad \forall i \in Z \quad \forall k \in N$.

Означимо функцію f на множині $(0; 1)$ рівностями

$$f(x = \Delta_{i_1 \dots i_k}^B) = \sigma_{i_1 1} + \sum_{k=2}^{\infty} \sigma_{i_k k} \prod_{j=1}^{k-1} p_{i_j j} \equiv \Delta_{i_1 \dots i_k} \dots, \quad (3)$$

$$f(x = \Delta_{i_1 \dots i_m}^B) = \sigma_{i_1 1} + \sum_{k=2}^m \sigma_{i_k k} \prod_{j=1}^{k-1} p_{i_j j} \equiv \Delta_{i_1 \dots i_m}(\emptyset).$$

Коректність означення функції рівностями (3) є наслідком єдиності B -зображення чисел і умов 1)–4), що гарантують збіжність ряду (3).

Якщо $p_{ik} = \Theta_i$ для всіх $i \in Z$, $k \in N$, то $f(x) = x$. Частковий випадок, коли $\Theta_n = \Theta_{-n} = \tau^{3+|n|}$, де $\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $p_{ik} = p_i$ для всіх $i \in Z$, $k \in N$, розглядався у роботі [7].

5. Неперервність функції.

Теорема 2. Функція f , означена рівністю (3), неперервна в кожній точці області визначення.

Доведення. Оскільки функція f визначена в кожній точці інтервалу $(0; 1)$, то її неперервність у точці $x_0 \in (0; 1)$ рівносильна рівності

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0.$$

1. Нехай $x_0 = \Delta_{c_1 \dots c_n}^B$ — B -нескінченна точка, $x_0 \neq x = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^B$. Тоді існує $m \in N$ таке, що $\alpha_m \neq c_m$, але $\alpha_i = c_i$ при $i < m$. Розглянемо модуль різниці

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \prod_{i=1}^{m-1} p_{c_i i} \left(\sigma_{\alpha_m m} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \sigma_{\alpha_k k} \prod_{j=m}^{k-1} p_{\alpha_j j} - \sigma_{c_m m} - \sum_{k=2}^{\infty} \sigma_{c_k k} \prod_{j=m}^{k-1} p_{\alpha_j j} \right) \right|.$$

Оскільки вираз під останнім модулем є різницею двох чисел з інтервалу $(0; 1)$, то його значенням є число, модуль якого не перевищує 1.

Враховуючи, що з умови 3) для матриці $\|p_{ik}\|$ впливає умова

$$\prod_{k=1}^{m-1} p_{i_k k} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty \quad \forall \alpha_k \in L,$$

бачимо, що

$$|f(x) - f(x_0)| \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty \Leftrightarrow x \rightarrow x_0.$$

Отже, функція f неперервна у точці x_0 .

2. Нехай $x_0 = \Delta_{c_1 \dots c_m(\emptyset)}^B$ — B -скінченна точка, $x \rightarrow x_0 - 0$. Для чисел $x < x_0$, достатньо близьких до x_0 , маємо $x = \Delta_{c_1 \dots c_{m-1}[c_m-1]\alpha_{m+1}\alpha_{m+2}\dots}^B$, причому умова $x \rightarrow x_0$ рівносильна умові $\alpha_{m+1} \rightarrow \infty$. Розглянемо різницю

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \prod_{i=1}^{m-1} p_{c_i} \right| \times C, \quad (4)$$

де

$$\begin{aligned} C &= \left| \sigma_{[c_m-1]m} + p_{[c_m-1]m} \sum_{k=m+1}^{\infty} \sigma_{\alpha_k k} \prod_{i=m}^{k-1} p_{\alpha_i i} - \sigma_{c_m m} \right| \\ &= \left| \sigma_{[c_m-1]m} + p_{[c_m-1]m} \sigma_{\alpha_{m+1}[m+1]} + p_{\alpha_m m} p_{\alpha_{m+1}[m+1]} \sum_{k=m+2}^{\infty} \sigma_{\alpha_k k} \prod_{i=m+1}^{k-1} p_{\alpha_i i} - \sigma_{c_m m} \right| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

оскільки $\sigma_{\alpha_{m+1}[m+1]} \rightarrow 1$ при $\alpha_{m+1} \rightarrow \infty$.

3. Нехай $x \rightarrow x_0 + 0$, $x = \Delta_{c_1 \dots c_m \alpha_{m+1} \alpha_{m+2} \dots}^B$ і $\alpha_{m+1} \rightarrow -\infty$. Розглянемо різницю

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \prod_{i=1}^m p_{c_i i} \right| \times C,$$

де

$$\begin{aligned} C &= \left| \sigma_{[c_m-1]m} + p_{[c_m-1]m} \sum_{k=m+1}^{\infty} \sigma_{\alpha_k k} \prod_{i=m}^{k-1} p_{\alpha_i i} - \sigma_{c_m m} \right| \\ &= \left| \sigma_{[c_m-1]m} + p_{[c_m-1]m} \sigma_{\alpha_{m+1}[m+1]} + p_{\alpha_m m} p_{\alpha_{m+1}[m+1]} \sum_{k=m+2}^{\infty} \sigma_{\alpha_k k} \prod_{i=m+1}^{k-1} p_{\alpha_i i} - \sigma_{c_m m} \right| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

оскільки $\sigma_{\alpha_{m+1}[m+1]} \rightarrow 1$ при $\alpha_{m+1} \rightarrow \infty$.

Отже, f неперервна у кожній точці інтервалу $(0; 1)$.

6. Функції канторівського типу. Множиною сталості функції називається об'єднання всіх її інтервалів сталості. Множиною несталості функції називається доповнення множини сталості до всієї області визначення.

Кажуть, що визначена і неперервна на проміжку функція, відмінна від константи, має канторівський тип, якщо сумарна довжина її інтервалів сталості дорівнює довжині області визначення (проміжку) [8]. Кожна функція канторівського типу є сингулярною, тобто неперервною функцією, похідна якої рівна нулю майже скрізь у розумінні міри Лебега. Найпростішим прикладом такої функції є класична функція Кантора, вперше розглянута Лебегом [9].

Зауважимо, що функція канторівського типу може бути монотонною, немонотонною і ніде не монотонною, крім проміжків сталості; мати як обмежену, так і необмежену варіацію [10–12].

Ми кажемо, що функція має *квазіканторівський тип*, якщо її множина несталості (зокрема множина точок зростання для неспадних функцій) є ніде не щільною, але має додатну міру Лебега, тоді як функція канторівського типу вона має нульову міру Лебега.

Лема 1. Якщо $p_{cm} = 0$, то функція f є сталою на кожному циліндрі $\Delta_{c_1 c_2 \dots c_{m-1} c}^B$.

Доведення. Справді, якщо $x \in \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} c}^B = [a, d)$, де

$$a = b_{c_1} + \sum_{k=2}^{m-1} b_{c_k} \prod_{i=1}^{k-1} \Theta_{c_i} + b_c \prod_{i=1}^{m-1} \Theta_{c_i}, \quad d = a + \Theta_c \prod_{i=1}^{m-1} \Theta_{c_i},$$

то $x = \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} c \alpha_1 \alpha_2 \dots}^B$, $f(x) = f(a) + 0$, оскільки $p_c \prod_{i=1}^{m-1} p_{c_i} = 0$, або $x = \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} c(\emptyset)}^B$ і $f(x) = f(a)$.

Наслідок 1. Якщо $p_{ik} \neq 0$ для будь-яких $i \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$, то функція f не має інтервалів сталості.

Лема 2. Приріст $\mu_f(\Delta_{c_1 \dots c_m}^B) \equiv f(d) - f(a)$ функції f на циліндрі $\Delta_{c_1 \dots c_m}^B = [a; d)$ обчислюється за формулою $\mu_f(\Delta_{c_1 \dots c_m}^B) = \prod_{i=1}^m p_{c_i i}$.

Доведення. Оскільки

$$a = b_{c_1} + \sum_{k=2}^m b_{c_k} \prod_{i=1}^{k-1} \Theta_{c_i} = \Delta_{c_1 \dots c_m(\emptyset)}^B, \quad d = a + \prod_{i=1}^m \Theta_{c_i} = \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} [c_m+1](\emptyset)}^B,$$

то, враховуючи неперервність функції і те, що $\sigma_{[c_m+1]m} - \sigma_{c_m m} = p_{c_m m}$, маємо

$$f(d) - f(a) = \left(\prod_{i=1}^{m-1} p_{c_i i} \right) (\sigma_{[c_m+1]m} - \sigma_{c_m m}) = \prod_{i=1}^m p_{c_i i}.$$

Наслідок 2. Якщо $p_{c_i i} \neq 0$ для всіх $i \leq m$, то приріст функції f на циліндрі $\Delta_{c_1 \dots c_m}^B$ є або додатним, або від'ємним, причому додатним, якщо $\prod_{i=1}^m p_{c_i i} > 0$, і від'ємним у протилежному випадку.

Наслідок 3. Якщо матриця $\|p_{ik}\|$ не має від'ємних елементів, то f є функцією розподілу на інтервалі $(0; 1)$, причому строго зростаючою, якщо матриця не містить нулів.

Теорема 3. Міра Лебега множини S_f несталості функції f обчислюється за формулою

$$\lambda(S_f) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})} \right) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - W_k), \quad (5)$$

де $F_0 = [0; 1]$, F_k — об'єднання всіх B -циліндрів рангу k , які містять циліндри вищих рангів з ненульовими приростами функції f , $\overline{F}_k \equiv F_{k-1} \setminus F_k$, $W_k = \sum_{i: p_{ik}=0} \Theta_{c_i}$.

Доведення. Очевидно, що $S_f \subset F_{k+1} \subset F_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$ і $S_f = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k = \lim_{k \rightarrow \infty} F_k$. Внаслідок вимірності S_f і неперервності міри Лебега маємо $\lambda(S_f) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(F_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(F_k)}{\lambda(F_{k-1})}$. Оскільки $F_k = F_{k-1} \setminus \overline{F}_k$, то виконується передостання з рівностей (5), але $\frac{\lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})} = W_k$, а тому справедлива остання з рівностей (5).

Наслідок 4. $\lambda(S_f) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(\overline{F}_k)}{\lambda(F_{k-1})} = \sum_{k=1}^{\infty} W_k = \infty$.

Теорема 4. Функція f є сингулярною функцією канторівського типу тоді й лише тоді, коли нескінченна кількість стовпців матриці $\|p_{ik}\|$ містять нулі, і при цьому

$$\sum_{k \in N} W_k = \infty.$$

Доведення. Це твердження випливає з означення функції канторівського типу, попереднього твердження і відомого взаємозв'язку збіжності – розбіжності нескінченних добутоків і рядів.

Наслідок 5. Якщо $p_{ik} = p_i$ для будь-якого $k \in N$ і існує $p_m = 0$, то f є функцією канторівського типу.

Наслідок 6. Якщо $p_{ikk} = 0$, $p_{jk} \neq 0$ при $j \neq j_k$ і $\Theta_{i_k} < \frac{1}{k^2}$ для будь-якого k , то ряд $\sum_{k \in N} W_k$ збігається і f є функцією квазіканторівського типу.

7. Розподіли значень функції. Нехай $\zeta = \Delta_{\zeta_1 \zeta_2 \dots \zeta_n \dots}^B$ — випадкова величина з незалежними однаково розподіленими цифрами B -зображення $P\{\zeta_n = i\} = q_i \geq 0$, $\sum_{i \in Z} q_i = 1$.

Легко довести, що ζ має чистий лебегівський тип розподілу: чисто дискретний, чисто абсолютно неперервний, чисто сингулярно неперервний (загальну схему доведення цього наведено у роботі [13]), причому чисто дискретний розподіл — тоді й лише тоді, коли $\max\{q_i\} = 1$. При $\max\{q_i\} \neq 1$ розподіл ζ є чисто неперервним, причому

рівномірним на $(0; 1)$, якщо $q_k = \Theta_k \ \forall k \in Z$;

сингулярним розподілом канторівського, якщо існує $q_i = 0$;

сингулярним розподілом салемиївського типу, якщо $q_k > 0 \ \forall k \in Z$ та існує $p_i \neq \Theta_i$.

Далі виключимо з розгляду випадок дискретності розподілу ζ .

Лема 3. Якщо f — функція канторівського типу, а ζ — випадкова величина з незалежними однаково розподіленими цифрами B -зображення, то точка

$$y_* = f\left(\Delta_{c_1 \dots c_{m-1} i(\emptyset)}^B\right), \quad \text{де } p_{c_k k} \neq 0 \neq q_{c_k}, \quad k = \overline{1, m-1}, \quad p_{im} = 0 \neq q_i, \quad (6)$$

є атомом розподілу випадкової величини $Y = f(\zeta)$, маса якого дорівнює значенню виразу $q_i \prod_{k=1}^{m-1} q_{c_k} = P\left\{\zeta \in \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} i}^B\right\}$.

Доведення. Якщо $p_{c_k k} \neq 0$ при $k \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ і $p_{im} = 0$, то згідно з лемою 1 функція f є сталою на циліндрі $\Delta_{c_1 \dots c_{m-1} i}^B$. Разом з цим

$$P\left\{\xi \in \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} i}^B\right\} = q_i \prod_{k=1}^{m-1} q_{c_k} > 0.$$

Зокрема, якщо ζ має рівномірний розподіл, то

$$P\left\{\zeta \in \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} i}^B\right\} = |\Delta_{c_1 \dots c_{m-1} i}^B| = \Theta_i \prod_{j=1}^{m-1} \Theta_{c_j}.$$

Тоді для будь-якого $x \in \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} i}^B$, $f\left(x = \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} i(\emptyset)}^B\right) = y_*$. Тому

$$P\{Y = y_*\} = P\left\{\zeta \in \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} i}^B\right\} > 0.$$

Отже, y_* є атомом розподілу випадкової величини Y з указаною масою.

Наслідок 7. Якщо f — функція розподілу канторівського типу, а ζ — неперервна випадкова величина з незалежними однаково розподіленими цифрами B -зображення, то точковий спектр (множину атомів) випадкової величини $Y = f(\zeta)$ утворюють точки вигляду (8).

Введемо позначення

$$A_{0k} \equiv \{i : p_{ik} \neq 0 \neq q_i\}, \quad A_{1k} \equiv \{i : p_{ik} = 0 \neq q_i\},$$

$$\sum_{i \in A_{0k}} q_i \equiv Q_k, \quad \sum_{i \in A_{1k}} q_i \equiv G_k, \quad k \in N.$$

Теорема 5. Якщо f — функція розподілу канторівського (або квазіканторівського) типу, а ζ — неперервна випадкова величина з незалежними однаково розподіленими цифрами B -зображення, причому $P\{\zeta_n = i\} = q_i > 0$, $\sum_{i \in Z} q_i = 1$, то випадкова величина $Y = f(\zeta)$ має чисто дискретний розподіл тоді й лише тоді, коли

$$G \equiv \sum_{k=1}^{\infty} G_k \prod_{i=1}^{k-1} Q_i = 1, \quad (7)$$

$q_k = \Theta_k \quad \forall k \in Z$, атомами якого є кожна з точок вигляду

$$y = f\left(\Delta_{c_1 \dots c_{m-1} i}^B(\emptyset)\right), \quad \text{де } p_{c_k k} \neq 0 \neq q_{c_k}, \quad k = \overline{1, m-1}, \quad p_{im} = 0 \neq q_i, \quad (8)$$

маса атома якої дорівнює $q_i \prod_{k=1}^{m-1} q_{c_k}$. У решті випадків розподіл Y є нетривіальною сумішшю дискретного та неперервного розподілів.

Доведення. Оскільки f — функція розподілу канторівського (квазіканторівського) типу, то вона монотонна і має нескінченну кількість B -циліндрів сталості, причому різних рангів. Внаслідок неперервності розподілу ζ атоми в розподілі випадкової величини Y можуть з'явитися лише за рахунок інтервалів сталості функції f . Тому розподіл випадкової величини Y має нескінченну кількість атомів згідно з лемою 8 лише у випадку, коли у послідовності A_{0n} нескінченна кількість непорожніх множин. І лише в тому випадку, коли сума G мас усіх атомів дорівнює 1, розподіл випадкової величини Y буде чисто дискретним, а це буде тоді, коли виконується умова (7).

Окремо розглянемо випадок, коли ζ має рівномірний розподіл. Якщо f — функція канторівського типу, то $q_i = \Theta_i \quad \forall i \in Z$,

$$P\{\zeta \in \Delta_{c_1 \dots c_m i}^B\} = |\Delta_{c_1 \dots c_m i}^B| = \Theta_i \prod_{j=1}^{m-1} \Theta_{c_j}.$$

Тоді за даних умов для будь-якого $x \in \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} i}^B$ маємо $f\left(x = \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} i}^B(\emptyset)\right) = y_0$. Тому

$$P\{Y = y_0\} = P\left\{X \in \Delta_{c_1 \dots c_{m-1} i}^B\right\} = |\Delta_{c_1 \dots c_{m-1} i}^B| = \Theta_i \prod_{j=1}^{m-1} \Theta_{c_j}.$$

Отже, y_0 є атомом розподілу випадкової величини Y з указаною масою. А враховуючи канторовість функції f , а саме те, що сумарна довжина всіх її інтервалів сталості дорівнює

1, робимо висновок, що розподіл Y чисто дискретний. Нехай тепер f — функція квазі-канторівського типу. Аналогічно до попереднього випадку формується її точковий спектр. Але сума довжин інтервалів сталості функції менша 1, тому сума мас усіх атомів автоматично менша 1. Отже, розподіл Y є нетривіальною сумішшю дискретного і неперервного розподілів.

8. Умови ніде не монотонності функції.

Теорема 6. *Функція f є ніде не монотонною тоді й лише тоді, коли серед елементів матриці $\|p_{ik}\|$ немає нулів і нескінченна кількість її стовпців містять від'ємні елементи.*

Доведення. Спочатку доведемо, що коли матриця не має нульових елементів і нескінченна кількість її стовпців містять від'ємні елементи, то функція f ніде не монотонна.

Оскільки в матриці $\|p_{ik}\|$ нулів немає, то згідно з наслідком з леми 2 функція f не має інтервалів сталості. Залишається довести, що f не має інтервалів монотонності. Оскільки для будь-якого інтервалу $(a; b) \subset (0; 1)$ легко вказати B -циліндр, який цілком належить цьому інтервалу, то для доведення вказаного твердження досить показати, що функція не є монотонною на будь-якому B -циліндрі.

Нехай $\Delta_{c_1 \dots c_m}^B$ — довільний циліндр рангу m і $p_{ik} < 0$, де $k > m$.

Приріст функції на B -циліндрі $\Delta_{c_1 \dots c_m \dots c_{k-1} c}^B = [a_1; d_1)$ подаємо у вигляді

$$f(d_1) - f(a_1) = p_{ck} \prod_{j=1}^{k-1} p_{c_j j},$$

а на B -циліндрі $\Delta_{c_1 \dots c_m \dots c_{k-1} c c_{k+1} \dots c_{n-1} i}^B = [a_2; d_2)$, де $p_{in} < 0$, причому $p_{js} > 0$ для будь-яких $j \in Z$ і $k < s < n$, має вигляд

$$f(d_2) - f(a_2) = \left(\prod_{j=1}^{k-1} p_{c_j j} \right) p_{ck} \left(\prod_{j=k+1}^{n-1} p_{c_j j} \right) p_{in}. \quad (9)$$

Оскільки $[a_2; d_2) \subset [a_1; d_1)$, а $\prod_{j=k+1}^{n-1} p_{c_j j} > 0$ (до речі, при $n = k + 1$ цей множник у добутку (9) просто відсутній), то прирости функції на вказаних циліндрах, які належать циліндру $\Delta_{c_1 \dots c_m}^B$, мають протилежні знаки.

Таким чином, функція на B -циліндрі $\Delta_{c_1 \dots c_m}^B$ не є монотонною, а отже, є ніде не монотонною завдяки довільності вибору цього B -циліндра.

Нехай f — ніде не монотонна функція. Якщо припустити, що серед елементів матриці $\|p_{ik}\|$ є нулі (нехай $p_{cs} = 0$), то згідно з лемою 1 функція має проміжки сталості, що суперечить її ніде не монотонності. Отже, нульові елементи у матриці $\|p_{ik}\|$ відсутні.

Припустимо тепер, що лише скінченна кількість стовпців матриці мають від'ємні елементи і $p_{ik} > 0 \forall i \in Z, k > k_0$. Тоді згідно з наслідком 3 з леми 2 на кожному циліндрі рангу k функція f є монотонною. У цьому випадку вона є кусково-монотонною, що знову суперечить умові ніде не монотонності. Отримані суперечності з припущеннями доводять, що умова відсутності нулів у матриці $\|p_{ik}\|$ і наявність у ній нескінченної кількості стовпців з від'ємними елементами є необхідною і достатньою для ніде не монотонності функції.

9. Варіаційні властивості функції. У класі $P(B)$ існують функції обмеженої та необмеженої варіації залежно від властивостей матриці $\|p_{ik}\|$.

Лема 4. *Функція f свого найбільшого і найменшого значення на Φ -циліндрі набуває на його кінцях.*

Доведення. Розглянемо довільний B -циліндр $\Delta_{c_1 \dots c_m}^B = [a; d]$, де $a = \Delta_{c_1 \dots c_m(\emptyset)}^\Phi$, $d = \Delta_{c_1 \dots c_{m-1}[c_m+1](\emptyset)}^B$, і точку x , що йому належить. Число x може бути B -скінченним або B -нескінченним. Розглянемо обидва можливі випадки: $x = x_1 = \Delta_{c_1 \dots c_m i(\emptyset)}^B$ і $x = x_2 = \Delta_{c_1 \dots c_m \dots c_k \dots}^B$. Якщо $D \equiv \prod_{k=1}^{m-1} p_{c_k k}$, то

$$f(x_1) - f(a) = D p_{c_m m} \sigma_{i[m+1]},$$

$$f(d) - f(x_1) = D(\sigma_{[c_m+1]m} - \sigma_{c_m m} - p_{c_m m} \sigma_{i[i+1]}) = D p_{c_m m} (1 - \sigma_{i[m+1]}).$$

Оскільки $\sigma_{i[m+1]} > 0$ і $1 - \sigma_{i[m+1]} > 0$, то значення виразів $f(x_1) - f(a)$ і $f(d) - f(x_1)$ мають однакові знаки або ж одночасно рівні 0. Тому $f(a)$ є максимальним, а $f(d)$ — мінімальним, якщо $f(x_1) - f(a) < 0$, і навпаки у протилежному випадку.

Аналогічно

$$f(x_2) - f(a) = D p_{c_m m} \sum_{k=m+1}^{\infty} \sigma_{c_k i_k} \prod_{j=m+1}^{k-1} p_{c_j j},$$

$$\begin{aligned} f(d) - f(x_2) &= D \left(\sigma_{[c_m+1]m} - \sigma_{c_m m} - \sum_{k=m+1}^{\infty} \sigma_{c_k k} \prod_{j=m}^{k-1} p_{c_j j} \right) \\ &= D p_{c_m m} \left(1 - \sum_{k=m+1}^{\infty} \sigma_{c_k k} \prod_{j=m+1}^{k-1} p_{c_j j} \right). \end{aligned}$$

Оскільки

$$0 < 1 - \sum_{k=m+1}^{\infty} \sigma_{c_k k} \prod_{j=m+1}^{k-1} p_{c_j j} < 1,$$

то вирази $f(x_2) - f(a)$ і $f(d) - f(x_2)$ мають однакові знаки або одночасно рівні 0. Це приводить до тих же висновків.

Отже, функція f найбільшого і найменшого значень набуває на кінцях B -циліндра, що розглядається.

Лему 4 доведено.

Теорема 7. Варіація $V_0^1(f)$ функції f на інтервалі $(0; 1)$ обчислюється за формулою

$$V_1^0(f) = \prod_{k=1}^{\infty} V_k, \quad \text{де} \quad V_k = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |p_{ik}|. \quad (10)$$

Доведення. Сума приростів функції f на циліндрах 1-го рангу згідно з лемою 2 дорівнює

$$V_1 = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |p_{i1}|.$$

Завдяки умовам 1) і 2) для матриці $\|p_{ik}\|$ маємо $V_1 \geq 1$.

Сума приростів функції f на циліндрах 2-го рангу, що належать циліндру $\Delta_{c_1}^B$, має вигляд

$$|p_{c_1 1}| \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |p_{i 2}|.$$

Тоді суму B_2 приростів функції f на всіх циліндрах 2-го рангу обчислюємо за формулою

$$B_2 \equiv \sum_{c_1=-\infty}^{+\infty} \left(|p_{c_1 1}| \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |p_{i 2}| \right) = V_1 V_2.$$

Індуктивно міркуючи, отримуємо вираз B_m всіх приростів функції f на циліндрах рангу m :

$$B_m = \prod_{k=1}^m V_k.$$

Оскільки функція f свого найбільшого і найменшого значень на циліндрі набуває на його кінцях (див. лему 4), то варіація функції f на $(0; 1)$ дорівнює

$$V_0^1(f) = \lim_{m \rightarrow \infty} B_m = \prod_{k=1}^{\infty} V_k.$$

Наслідок 8. Функція f має необмежену варіацію тоді й лише тоді, коли

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - V_k) = -\infty.$$

Справді, оскільки $V_k = 1 - (1 - V_k) \geq 1$, то це твердження випливає з відомої теореми про взаємозв'язок збіжності нескінченних добутків і рядів.

Наслідок 9. Якщо всі стовпці матриці $\|p_{ik}\|$ однакові і функція f є ніде не монотонною, то вона має необмежену варіацію.

Доведення. Справді, при виконанні умов леми $V_m = V_1$, $B_m = V_1^m$, $V_0^1(f) = \lim_{m \rightarrow \infty} V_1^m$. Але з умови ніде не монотонності функції f випливає $V_1 > 1$. Отже, $V_0^1(f) = \infty$.

Наслідок 10. Якщо нескінченна кількість стовпців у матриці $\|p_{ik}\|$ містять нульові елементи і при цьому $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - V_k) = -\infty$, то f є функцією канторівського або квазі-канторівського типу, яка має необмежену варіацію і не має проміжків монотонності окрім проміжків сталості.

10. Автомодельні та інтегральні властивості функцій. Клас $P(B)$ функцій, означених рівністю (3), континуальний. Його важливий континуальний підклас $P_0(B)$ утворюють функції, визначені матрицями, всі стовпці яких однакові. У цьому випадку матрицю $\|p_{ik}\|$ визначає вектор-стовпець

$$(\dots, p_{-2}, p_{-1}, p_0, p_1, p_2, \dots) = \bar{p}.$$

У цій ситуації при $p_i = \Theta_i$ для будь-якого $i \in Z$ маємо $f(x) = x$.

Лема 5. Графік Γ_f функції f є структурно фрактальною множиною, а саме N -самоафінною множиною зі структурою самоафінності

$$\Gamma_f = \bigcup_{i=-\infty}^{+\infty} \Gamma_i, \quad \Gamma_i = \varphi_i(\Gamma_f), \quad \varphi_i: \begin{cases} x' = \Theta_i x + b_i, \\ y' = p_i y + \sigma_i, \end{cases} \quad i \in Z.$$

Доведення. Оскільки $\Gamma_f = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} H_i$, де $H_i = \{M(x; y) : x = \Delta_{i\alpha_2\alpha_3\dots}^B, y = \Delta_{i\alpha_2\alpha_3\dots}\}$, то залишається показати, що $H_i = \varphi_i(\Gamma_f)$.

Нехай $M(x; y) \in \Gamma_f$, тобто $x = \Delta_{c_1c_2\dots}^B$, $y = \Delta_{c_1c_2\dots} = f(x)$. Розглянемо точку $\varphi_i(M) = M'(\delta_i(x); \rho_i(x))$ — образ точки M під дією афінного перетворення φ_i , де $\delta_i(x) \equiv \Delta_{i\alpha_1\alpha_2\dots}^B$, $\rho_i(x) \equiv \Delta_{i\alpha_1\alpha_2\dots}$. Очевидно, що $M' \in H_i$, а отже, $\Gamma_i \subset H_i$.

Доведемо, що $H_i \subset \Gamma_i$.

Нехай $K^*(x^*; y^*) \in H_i$, тобто $x^* = \Delta_{i\alpha_2\alpha_3\dots}^B$, $y^* = \Delta_{i\alpha_2\alpha_3\dots}$; тоді очевидно, що K^* є образом точки $K(\bar{x}; \bar{y})$, де $\bar{x} = \Delta_{\alpha_2\alpha_3\dots}^B$, $\bar{y} = \Delta_{\alpha_2\alpha_3\dots}$, яка належить графіку функції f , під дією перетворення φ_i , а отже, $K \in \Gamma_i$. З $\Gamma_i \subset H_i$ і $H_i \subset \Gamma_i$ отримуємо рівність $G_i = H_i$ для довільного $i \in Z$. Тому твердження доведено.

Теорема 8. Має місце рівність

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{\sum_{i \in Z} \sigma_i \Theta_i}{1 - \sum_{i \in Z} \Theta_i p_i}.$$

Доведення. Оскільки функція f є неперервною, то вона інтегровна на кожному B -циліндрі. Використовуючи адитивну властивість інтеграла і N -самоафінність графіка функції, маємо

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{b_k}^{b_{k+1}} f(x) dx, \\ \int_{b_k}^{b_{k+1}} f(x) dx &= \int_0^1 (p_i f(x) + \sigma_i) d(\Theta_i x + b_i) = \Theta_i p_i \int_0^1 f(x) dx + \sigma_i \Theta_i, \\ \int_0^1 f(x) dx &= \sum_{i \in Z} \sigma_i \Theta_i + \sum_{i \in Z} \Theta_i p_i \int_0^1 f(x) dx, \\ \left(1 - \sum_{i \in Z} \Theta_i p_i\right) \int_0^1 f(x) dx &= \sum_{i \in Z} \sigma_i \Theta_i, \\ \int_0^1 f(x) dx &= \frac{\sum_{i \in Z} \sigma_i \Theta_i}{1 - \sum_{i \in Z} \Theta_i p_i}. \end{aligned}$$

11. Диференціальні властивості функції. У цьому пункті ми вважаємо, що $p_{ik} = p_i$ для будь-яких $i \in Z$, $k \in N$.

Лема 6. Міра Лебега множини канторівського типу

$$C[B, V] = \{x : x = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n \dots}^B, \alpha_n \in V \subset Z, V \neq Z\}$$

дорівнює нулю.

Доведення. Нехай $j \in V$, $V_j = Z \setminus \{j\}$. Очевидно, що $C[B, V] \subset C[B, V_j] \equiv C$, а отже, для міри Лебега маємо $\lambda(C[B, V]) \leq \lambda(C[B, V_j])$. Тому досить показати, що $\lambda(C[B, V_j]) = 0$.

Якщо $E_0 = [0; 1]$, E_n — об'єднання B -циліндрів рангу n , серед внутрішніх точок яких є точки множини C , то для довільного $n \in N$ маємо

$$C \subset E_{n+1} \subset E_n, \quad \bar{E}_n \equiv E_n \setminus E_{n-1}, \quad \lambda(C) \leq \lambda(E_n)$$

і

$$\lambda(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda(E_n)}{\lambda(E_{n-1})} \frac{\lambda(E_{n-1})}{\lambda(E_{n-2})} \dots \frac{\lambda(E_1)}{\lambda(E_0)} \right) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(E_n)}{\lambda(E_{n-1})}.$$

Але $\bar{E}_n \equiv E_{n-1} \setminus E_n$, а тому $E_n = E_{n-1} \setminus \bar{E}_n$;

$$\lambda(C) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(E_{n-1}) - \lambda(\bar{E}_n)}{\lambda(E_{n-1})} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda(\bar{E}_n)}{\lambda(E_{n-1})} \right).$$

Оскільки $0 < \frac{\lambda(\bar{E}_n)}{\lambda(E_{n-1})} = \Theta_j < 1$, то $\lambda(C) = 0 = \lambda(C[B, V])$.

Наслідок 11. Міра Лебега множини $E_n(i)$ всіх чисел із інтервалу $(0; 1)$, у B -зображенні яких цифра i може зустрічатися лише на перших n -місцях, дорівнює нулю.

Справді, оскільки

$$E_n(i) = \bigcup_{\alpha_1 \in A} \dots \bigcup_{\alpha_n \in A} [\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^B \cap E_n(i)],$$

а згідно з лемою 6 $\lambda[\Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^B \cap E_n(i)] = 0$, то $\lambda(E_n(i)) = 0$.

Теорема 9. Множина I всіх чисел із $(0; 1)$, у B -зображенні яких цифра $i \in A$ зустрічається лише скінченну кількість разів, має нульову міру Лебега.

Доведення. Оскільки $I \subset \bigcup_n E_n(i)$, то, враховуючи наслідок попередньої леми, маємо $\lambda(I) \leq \sum_n \lambda(E_n(i))$. Отже, $\lambda(I) = 0$.

Наслідок 12. Майже всі (у розумінні міри Лебега) числа інтервалу $(0; 1)$ у своїх B -зображеннях використовують усі цифри алфавіту нескінченну кількість разів.

Наслідок 13. Для майже всіх (у розумінні міри Лебега) $x = \Delta_{\alpha_1 \dots \alpha_n \dots}^B \in (0; 1)$ маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \alpha_n(x) = \infty.$$

Лема 7. Якщо у B -нескінченній точці x_0 існує скінченна похідна функції f , то її можна обчислити за формулою

$$f'(x_0) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{p_{\alpha_k(x_0)}}{\Theta_{\alpha_k(x_0)}}. \quad (11)$$

Якщо нескінченний добуток (11) розбігається, причому не до нуля, то не існує скінченної похідної функції f у точці x_0 .

Це твердження є наслідком теореми 3.11.1 з [14, с. 93].

Теорема 10. Якщо (p_n) — послідовність додатних дійсних чисел, серед членів якої існує $p_k \neq \Theta_k$, то f є сингулярною строго зростаючою функцією розподілу ймовірностей на інтервалі $(0; 1)$.

Доведення. З урахуванням наслідку 3 з леми 2 f є строго зростаючою функцією розподілу. Функція f , будучи монотонною, згідно з відомою теоремою Лебега має скінченну похідну на множині $\mathfrak{D}$ повної міри Лебега. Множину точок, що мають нормальну властивість, яку констатує наслідок 1 з теореми 9, позначимо через $\mathfrak{B}$. Тоді множина $\mathfrak{D} \cap \mathfrak{B}$ є множиною повної міри.

Для доведення сингулярності функції f розглянемо довільну точку $x_* \in \mathfrak{D} \cap \mathfrak{B}$. Враховуючи лему 7, маємо

$$f'(x_*) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_{\alpha_n(x_*)}}{\Theta_{\alpha_n(x_*)}}. \quad (12)$$

Оскільки нескінченна кількість членів останнього нескінченного добутку рівна $\frac{p_k}{\Theta_k} \neq 1$, то добуток (12) розбігається (не виконується необхідна умова збіжності добутку). Тому майже скрізь добуток (12) розбігається до нуля. Це й вимагалось довести. Отже, функція f є сингулярною згідно з означенням.

12. Заключні зауваження. Нескінченносимвольне B -зображення чисел має ряд специфічних властивостей, не притаманних іншим нескінченносимвольним зображенням (Q_∞ -зображення чисел [15], зображення чисел елементарними ланцюговими дробами, зображення чисел рядами Люрота, Енгеля, Сільвестера, Остроградського – Серпінського – Пірса тощо), які пов'язані з двосторонньо-нескінченим алфавітом і поліосновністю системи кодування чисел.

Залишилися нез'ясованими питання:

- 1) Чи існують у класі $P(B)$ функції, що мають множину рівня, яка є канторвалом?
- 2) Якою є розмірність Гаусдорфа – Безиковича множини $H = \{x : f'(x) \neq 0\}$ нульової міри Лебега для функції f , що є сингулярною функцією салеєвського типу [16], диференціальні властивості якої вивчалися у попередньому пункті?

Від імені всіх авторів відповідальний за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів.

Література

1. М. В. Працьовитий, Я. В. Гончаренко, С. О. Дмитренко, І. М. Лисенко, С. П. Ратушняк, *Про один клас функцій з фрактальними властивостями*, Буковин. мат. журн., **6**, № 1, 273 – 283 (2021).
2. M. Jarnicki, P. Pflug, *Continuous nowhere differentiable functions. The monsters of analysis*, Springer Monogr. Math., Springer, Cham (2015); <https://doi.org/10.1007/978-3-319-12670-8>.
3. M. V. Pratsiovytyi, Ya. V. Goncharenko, I. M. Lysenko, S. P. Ratushniak, *Fractal functions of exponential type that is generated by the Q_2^* -representation of argument*, Mat. Stud., **56**, № 2, 133 – 143 (2021).
4. М. В. Працьовитий, С. П. Ратушняк, *Неперервна ніде не диференційовна функція з фрактальними властивостями, визначена в термінах Q_2 -зображення*, Нелін. коливання, **23**, № 2, 231 – 252 (2020).
5. M. Pratsiovytyi, N. Vasylenko, *Fractal properties of functions defined in terms of Q -representation*, Int. J. Math. Anal., **7**, № 61 – 67, 3155 – 3169 (2013).
6. M. V. Pratsiovytyi, O. Yu. Feshchenko, *Topological-metric and fractal properties of the distributions on the set of the incomplete sums of series of positive terms*, Theory Stoch. Process., **13(29)**, № 1-2, 205 – 224 (2007).

7. M. V. Pratsiovytyi, O. M. Baranovskyi, O. I. Bondarenko, S. P. Ratushniak, *One class of continuous locally complicated functions related to infinite-symbol Φ -representation of numbers*, Mat. Stud., **59(2)**, 123–131; <https://doi.org/10.30970/ms.59.2.123-131>.
8. R. Salem, *On some singular monotonic functions which are strictly increasing*, Trans. Amer. Math. Soc., **53(3)**, 427–439 (1943); <https://doi.org/10.2307/1990210>.
9. M. Pratsiovytyi, I. Lysenko, O. Voitovska, *Distribution of values of classic singular Cantor function of random argument*, Random Oper. Stoch. Equ., **26**, № 4, 193–200 (2018).
10. М. В. Працьовитий, О. В. Свинчук, *Розсіювання значень однієї фрактальної неперервної немонотонної функції канторівського типу*, Нелін. коливання, **21**, № 1, 116–130 (2018).
11. М. В. Працьовитий, А. В. Калашніков, *Самоафінні сингулярні та ніде не монотонні функції, пов'язані з Q -зображенням чисел*, Укр. мат. журн., **65**, № 3, 381–393 (2013).
12. М. В. Працьовитий, С. П. Ратушняк, *Розподіл значень однієї фрактальної функції від випадкового аргументу*, Наук. часоп. НПУ ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1. Фіз.-мат. науки, № 16 (2), 150–160 (2014).
13. М. В. Працьовитий, *Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів*, Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова, Київ (1998).
14. М. В. Працьовитий, *Двосимвольні системи кодування дійсних чисел та їх застосування*, Наук. думка, Київ (2022).
15. M. V. Pratsiovytyi, O. L. Lechinskii, *Properties of random variable defined by the distributions of elements of their $\tilde{Q}_\infty$ -representation*, Theor. Probab. Math. Statist., № 57, 143–148 (1998).
16. R. Salem, *On singular monotonic functions of the Cantor type*, J. Math. Phys. Mass. Inst. Tech., **21(1-4)**, 69–82 (1942); doi:10.1002/sapm194221169.

Одержано 29.07.23