

DOI: 10.3842/nosc.v26i3.1421

УДК 517.958; 517.956.4

ПАРАБОЛІЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ В КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ КЛИНОВИДНОМУ ПОРОЖНИСТОМУ ЦИЛІНДРІ

Андрій Громик

*Заклад вищої освіти “Подільський державний університет”
вул. Шевченка, 12, Кам’янець-Подільський, 32316, Україна
e-mail: garon74@gmail.com*

Іван Конет

*Волинський національний університет імені Лесі Українки
вул. Потапова, 9, Луцьк, 43025, Україна
e-mail: konet51@ukr.net*

Тетяна Пилипюк

*Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
вул. Огієнка, 61, Кам’янець-Подільський, 32300, Україна
e-mail: t-myh@i.ua, відповідальна за листування*

By using the method of classic integral and hybrid integral transformations together with the method of main solutions (influence matrices and Green’s matrices), for the first time, we construct unique exact analytical solutions of parabolic boundary-value problems of mathematical physics in a piecewise homogeneous wedge-shaped hollow cylinder.

За допомогою методу класичних інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв’язків (матриць впливу та матриць Гріна) вперше побудовано єдині точні аналітичні розв’язки параболічних крайових задач математичної фізики в кусково-однорідному клиновидному порожнистому циліндрі.

1. Вступ. Теорія крайових задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними, зокрема рівнянь математичної фізики, — важливий розділ сучасної теорії диференціальних рівнянь, який інтенсивно розвивається. Її актуальність обумовлено як значущістю її результатів для розвитку багатьох розділів математики, так і численними застосуваннями її досягнень при дослідженні різноманітних математичних моделей різних процесів і явищ фізики, хімії, біології, медицини, економіки, екології, техніки, новітніх технологій.

Вагомі результати з теорії задачі Коші та початково-крайових (мішаних) задач для параболічних рівнянь і їхніх систем одержано у [1 – 8] та в працях інших відомих вітчизняних і зарубіжних математиків.

Добре відомо, що складність досліджуваних крайових задач суттєво залежить як від властивостей коефіцієнтів рівнянь (різні види виродженостей і особливостей коефіцієнтів), так і від геометричної структури області (гладкість межі, наявність кутових точок,

обмеженість, необмеженість тощо), в якій розглядають задачу. На цей час досить детально вивчено властивості розв'язків і розвинуто різноманітні методи побудови розв'язків (точні та наближені) крайових задач для лінійних, квазілінійних і деяких нелінійних рівнянь різних типів (еліптичних, параболічних, гіперболічних) в однозв'язних областях (однорідних середовищах), які обумовлені згаданими вище властивостями коефіцієнтів рівнянь і геометрії області, та побудовано функціональні простори коректності задач у сенсі Адамара.

Водночас багато важливих прикладних задач термомеханіки, теплофізики, дифузії, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливань, механіки деформівного твердого тіла приводять до крайових і мішаних задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними різних типів не тільки в однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними функціями, але й в неоднорідних і кусково-однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є кусково-неперервними функціями чи, зокрема, кусково-сталими [9 – 11].

Відомо, що крім *методу відокремлення змінних* (методу Фур'є) та його узагальнень, одним із важливих і ефективних методів вивчення лінійних крайових і мішаних задач для диференціальних рівнянь із частинними похідними в однорідних середовищах є *метод інтегральних перетворень*, який дає можливість побудувати в аналітичному вигляді точні розв'язки розглянутих задач через їхнє інтегральне зображення.

У той же час для досить широкого класу лінійних крайових задач у кусково-однорідних середовищах ефективним методом побудови їхніх розв'язків виявився *метод гібридних інтегральних перетворень*, що породжені відповідними гібридними диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядають або різні диференціальні оператори, або диференціальні оператори того ж самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [12 – 17].

У цій статті, яка є логічним продовженням [18, 19], за допомогою методу класичних інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з *методом головних розв'язків* (матриць впливу і матриць Гріна) вперше побудовано єдині точні аналітичні розв'язки параболічних початково-крайових задач математичної фізики в кусково-однорідному клиновидному порожнистому циліндрі.

2. Постановка задачі. Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині

$$D = \left\{ (t, r, \varphi, z) \mid t > 0; \quad r \in I_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} (R_{j-1}; R_j); \quad R_0 > 0; \quad R_{n+1} \equiv R < +\infty; \right. \\ \left. \varphi \in (0; \varphi_0); \quad 0 < \varphi_0 < 2\pi; \quad z \in (-l_1; l_2); \quad l_j \geq 0; \quad l_1 + l_2 \neq 0 \right\}$$

класичного розв'язку лінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними параболічного типу 2-го порядку [20]

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} - \left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{a_{\varphi j}^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j + \chi_j^2 u_j = f_j(t, r, \varphi, z), \quad (1) \\ r \in I_j, \quad j = \overline{1, n+1},$$

з початковими умовами

$$u_j(t, r, \varphi, z)|_{t=0} = g_j(r, \varphi, z), \quad r \in I_j, \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (2)$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0\right) u_1 \Big|_{r=R_0} = g_0(t, \varphi, z), \quad \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^{n+1}\right) u_{n+1} \Big|_{r=R} = g(t, \varphi, z), \quad (3)$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial r} + p_1\right) u_j \Big|_{z=-l_1} = w_j^1(t, r, \varphi), \quad \left(\frac{\partial}{\partial r} + p_2\right) u_j \Big|_{z=l_2} = w_j^2(t, r, \varphi), \quad (4)$$

$$p_j \geq 0, \quad p_1 + p_2 \neq 0, \quad r \in I_j, \quad j = \overline{1, n+1},$$

одними з крайових умов на гранях клина [17]

$$u_j|_{\varphi=0} = g_{1j}(t, r, z), \quad u_j|_{\varphi=\varphi_0} = w_{1j}(t, r, z), \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (5)$$

$$u_j|_{\varphi=0} = g_{2j}(t, r, z), \quad \frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0} = -w_{2j}(t, r, z), \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = g_{3j}(t, r, z), \quad u_j|_{\varphi=\varphi_0} = w_{3j}(t, r, z), \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = g_{4j}(t, r, z), \quad \frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0} = -w_{4j}(t, r, z), \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (8)$$

та умовами спряження [15]

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k\right) u_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k\right) u_{k+1}\right] \Big|_{r=R_k} = 0, \quad j = 1, 2, \quad k = \overline{1, n}, \quad (9)$$

де a_{rj} , $a_{\varphi j}$, a_{zj} , χ_j , α_{js}^k , β_{js}^k — деякі сталі;

$$c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k \neq 0, \quad c_{1k} \cdot c_{2k} > 0,$$

$$\alpha_{11}^0 \leq 0, \quad \beta_{11}^0 \geq 0, \quad |\alpha_{11}^0| + \beta_{11}^0 \neq 0, \quad \alpha_{22}^{n+1} \geq 0, \quad \beta_{22}^{n+1} \geq 0, \quad \alpha_{22}^{n+1} + \beta_{22}^{n+1} \neq 0,$$

$$f(t, r, \varphi, z) = (f_1(t, r, \varphi, z), f_2(t, r, \varphi, z), \dots, f_{n+1}(t, r, \varphi, z)),$$

$$g(r, \varphi, z) = (g_1(r, \varphi, z), g_2(r, \varphi, z), \dots, g_{n+1}(r, \varphi, z)),$$

$$w^1(t, r, \varphi) = (w_1^1(t, r, \varphi), w_2^1(t, r, \varphi), \dots, w_{n+1}^1(t, r, \varphi)),$$

$$w^2(t, r, \varphi) = (w_2^1(t, r, \varphi), w_2^2(t, r, \varphi), \dots, w_{n+1}^2(t, r, \varphi)),$$

$$g_0(t, \varphi, z), \quad g(t, \varphi, z), \quad g_{pj}(t, r, z), \quad w_{pj}(t, r, z), \quad p = \overline{1, 4}, \quad j = \overline{1, n+1},$$

— задані дійсні обмежені неперервні функції;

$$u(t, r, \varphi, z) = (u_1(t, r, \varphi, z), u_2(t, r, \varphi, z), \dots, u_{n+1}(t, r, \varphi, z))$$

— шукана дійсна неперервно диференційовна за змінною t і двічі наперервно диференційовна за геометричними змінними (r, φ, z) функція.

Зауважимо, що:

1) у випадку $\chi_j \equiv 0$, $j = \overline{1, n+1}$, рівняння (1) є класичним тривимірним неоднорідним рівнянням теплопровідності (дифузії) для ортотропного середовища у циліндричній системі координат;

2) якщо $\alpha_{11}^k = 0$, $\beta_{11}^k = 1$, $\alpha_{12}^k = 0$, $\beta_{12}^k = 1$, $\alpha_{21}^k = \lambda_1^k$, $\beta_{21}^k = 0$, $\alpha_{22}^k = \lambda_2^k$, $\beta_{22}^k = 0$, де λ_1^k , λ_2^k — коефіцієнти теплопровідності, то умови спряження (9) збігаються з умовами ідеального теплового (термічного) контакту;

3) якщо $\alpha_{11}^k = b_k$, $\beta_{11}^k = 1$, $\alpha_{21}^k = 0$, $\beta_{21}^k = 1$, $\alpha_{21}^k = \lambda_1^k$, $\beta_{21}^k = 0$, $\alpha_{22}^k = \lambda_2^k$, $\beta_{22}^k = 0$, де b_k — коефіцієнти термоопору, то умови спряження (9) збігаються з умовами неідеального теплового контакту.

Отже, у зазначених випадках 1, 2 (або 1, 3) розглянута параболічна початково-крайова задача математичної фізики моделює процеси теплопровідності в кусково-однорідному клиновидному порожнистому циліндрі [12].

3. Основна частина. Припустимо, що розв'язки параболічних початково-крайових задач спряження (1)–(4), (5), (9); (1)–(4), (6), (9); (1)–(4), (7), (9); (1)–(4), (8), (9) існують і задані; шукані функції задовольняють умови застосовності залучених далі прямих і обернених інтегральних і гібридних інтегральних перетворень [16, 18].

Згідно з [18] визначимо скінченні пряме $F_{m,ik}$ та обернене $F_{m,ik}^{-1}$ інтегральні перетворення Фур'є щодо кутової змінної $\varphi \in (0; \varphi_0)$ за формулами

$$F_{m,ik}[f(\varphi)] = \int_0^{\varphi_0} f(\varphi) U_{m,ik}(\varphi) d\varphi \equiv f_{m,ik}, \quad (10)$$

$$F_{m,ik}^{-1}[f_{m,ik}] = \frac{2}{\varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m^{ik} f_{m,ik} U_{m,ik}(\varphi) \equiv f(\varphi), \quad (11)$$

де

$$U_{m,11}(\varphi) = \sin(\beta_{m,11}\varphi), \quad \beta_{m,11} = \frac{\pi m}{\varphi_0},$$

$$U_{m,12}(\varphi) = \sin(\beta_{m,12}\varphi), \quad \beta_{m,12} = \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0},$$

$$U_{m,21}(\varphi) = \cos(\beta_{m,21}\varphi), \quad \beta_{m,21} = \beta_{m,12},$$

$$U_{m,22}(\varphi) = \cos(\beta_{m,22}\varphi), \quad \beta_{m,22} = \beta_{m,11},$$

$$\varepsilon_0^{ik} = 0, \quad \varepsilon_m^{ik} = 1 \text{ при } ik = 11, 12, 21, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \quad \varepsilon_0^{22} = \frac{1}{2}, \quad \varepsilon_m^{22} = 1 \text{ при } m = 1, 2, 3, \dots$$

При цьому для інтегрального оператора $F_{m,ik}$ виконується тотожність

$$F_{m,ik} \left[\frac{d^2 f}{d\varphi^2} \right] = -\beta_{m,ik}^2 f_{m,ik} + \Phi_{m,ik}(f), \quad i, k = 1, 2, \quad (12)$$

де

$$\Phi_{m,11}(f) = \frac{\pi m}{\varphi_0} [f(0) + (-1)^{m+1} f(\varphi_0)],$$

$$\Phi_{m,12}(f) = \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0} f(0) + (-1)^m \frac{df}{d\varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_0},$$

$$\Phi_{m,21}(f) = -\frac{df}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0} + (-1)^m \frac{\pi(2m+1)}{2\varphi_0} f(\varphi_0),$$

$$\Phi_{m,22}(f) = -\frac{df}{d\varphi}\Big|_{\varphi=0} + (-1)^m \frac{df}{d\varphi}\Big|_{\varphi=\varphi_0}.$$

Інтегральний оператор $F_{m,ik}$, який діє за формулою (10), внаслідок тотожності (12) тривимірним початково-крайовим задачам спряження (1)–(4), (5), (9); (1)–(4), (6), (9); (1)–(4), (7), (1); (1)–(4), (8), (9) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D' = \{(t, r, z) \mid t > 0; r \in I_n^+; z \in (-l_1; l_2)\}$ класичного розв'язку двовимірних диференціальних рівнянь параболічного типу 2-го порядку

$$\frac{\partial u_{jm,ik}}{\partial t} - \left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\nu_{jm,ik}^2}{r^2} \right) + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_{jm,ik} + \chi_j^2 u_{jm,ik} = G_{jm,ik}(t, r, z), \quad (13)$$

$$r \in I_j, \quad j = \overline{1, n+1},$$

з початковими умовами

$$u_{jm,ik}(t, r, z)|_{t=0} = g_{jm,ik}(r, z), \quad r \in I_j, \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (14)$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0 \right) u_{1m,ik} \Big|_{r=R_0} = g_{0m,ik}(t, z), \quad \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^{n+1} \right) u_{n+1,m,ik} \Big|_{r=R} = g_{m,ik}(t, z), \quad (15)$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial z} + p_1 \right) u_{jm,ik} \Big|_{z=-l_1} = w_{jm,ik}^1(t, r), \quad \left(\frac{\partial}{\partial z} + p_2 \right) u_{jm,ik} \Big|_{z=l_2} = w_{jm,ik}^2(t, r) \quad (16)$$

й умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^p \right) u_{pm,ik} - \left(\alpha_{j2}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^p \right) u_{p+1,m,ik} \right] \Big|_{r=R_p} = 0, \quad j = 1, 2, \quad p = \overline{1, n}, \quad (17)$$

де $G_{jm,ik}(t, r, z) = f_{jm,ik}(t, r, z) + a_{\varphi j}^2 r^{-2} \Phi_{m,ik}(t, r, z)$, $\nu_{jm,ik} = a_{rj}^{-1} a_{\varphi j} \beta_{m,ik}$.

Застосуємо до двовимірної початково-крайової задачі спряження (13)–(17) скінченне інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті $(-l_1; l_2)$ щодо змінної z [18]:

$$\Lambda_s[f(z)] = \int_{-l_1}^{l_2} f(z) v_s(z + l_1) dz \equiv f_s, \quad (18)$$

$$\Lambda_s^{-1}[f_s] = \sum_{s=1}^{\infty} f_s \frac{v_s(z + l_1)}{\|v_s(z + l_1)\|^2} \equiv f(z), \quad (19)$$

$$\Lambda_s \left[\frac{d^2 f}{dz^2} \right] = -\gamma_s^2 f_s + v_s(0) \left(-\frac{df}{dz} + p_1 f \right) \Big|_{z=-l_1} + v_s(l) \left(\frac{df}{dz} + p_2 f \right) \Big|_{z=l_2}, \quad l = l_1 + l_2. \quad (20)$$

У формулах (18)–(20) використовується спектральна функція (ядро перетворення)

$$v_s(z + l_1) = \frac{\gamma_s \cos \gamma_s(z + l_1) + p_1 \sin \gamma_s(z + l_1)}{\sqrt{\gamma_s^2 + p_1^2}},$$

квадрат норми якої

$$\|v_s(z + l_1)\|^2 \equiv \int_{-l_1}^{l_2} v_s^2(z + l_1) dz = \frac{l}{2} + \frac{(p_1 + p_2)(\gamma_s^2 + p_1 p_2)}{2(\gamma_s^2 + p_1^2)(\gamma_s^2 + p_2^2)}.$$

При цьому

$$v_s(0) = \frac{\gamma_s}{\sqrt{\gamma_s^2 + p_1^2}}, \quad v_s(l) = \frac{\gamma_s}{\sqrt{\gamma_s^2 + p_2^2}},$$

$\{\gamma_s\}_{s=1}^\infty$ — монотонно зростаюча послідовність дійсних різних додатних коренів трансцендентного рівняння $\operatorname{ctg}(\gamma l) = \frac{\gamma^2 - p_1 p_2}{\gamma(p_1 + p_2)}$, які утворюють дискретний спектр.

Інтегральний оператор Λ_s , який діє за формулою (18), внаслідок тотожності (20) ставить у відповідність початково-крайовій задачі (13)–(17) задачу побудови обмеженого на множині $D'' = \{(t, r) \mid t > 0; r \in I_n^+\}$ класичного розв'язку одновимірних диференціальних рівнянь B -параболічного типу 2-го порядку [5]

$$\frac{\partial u_{jm,ik,s}}{\partial t} - a_{rj}^2 B_{\nu_{jm,ik}}[u_{jm,ik,s}] + (a_{zj}^2 \gamma_s^2 + \chi_j^2) u_{jm,ik,s} = P_{jm,ik,s}(t, r), \quad (21)$$

$$r \in I_j, \quad j = \overline{1, n+1},$$

з початковими умовами

$$u_{jm,ik,s}(t, r)|_{t=0} = g_{jm,ik,s}(r), \quad r \in I_j, \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (22)$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0 \right) u_{1m,ik,s} \Big|_{r=R_0} = g_{0m,ik,s}(t), \quad (23)$$

$$\left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^{n+1} \right) u_{n+1,m,ik,s} \Big|_{r=R} = g_{m,ik,s}(t)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^p \right) u_{pm,ik,s} - \left(\alpha_{j2}^p \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^p \right) u_{p+1,m,ik,s} \right] \Big|_{r=R_p} = 0, \quad j = 1, 2, \quad p = \overline{1, n}, \quad (24)$$

де $B_{\nu_{jm,ik}} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\nu_{jm,ik}^2}{r^2}$ — класичний диференціальний оператор Бесселя [5],

$$P_{jm,ik,s}(t, r) = G_{jm,ik,s}(t, r) + a_{zj}^2 v_s(0) w_{jm,ik}^1(t, r) + a_{zj}^2 v_s(l) w_{jm,ik}^2(t, r).$$

До одновимірної початково-крайової задачі спряження (21)–(24) застосуємо скінченне гібридне інтегральне перетворення типу Ганкеля 2-го роду на кусково-однорідному сегменті I_n^+ із n точками спряження щодо радіальної змінної r [16]:

$$M_{pn}[f(r)] = \int_{R_0}^R f(r) V(r, \lambda_p) \sigma(r) dr \equiv \tilde{f}(\lambda_p), \quad (25)$$

$$M_{pn}^{-1}[\tilde{f}(\lambda_p)] = \sum_{p=1}^{\infty} \tilde{f}(\lambda_p) \frac{V(r, \lambda_p)}{\|V(r, \lambda_p)\|^2} \equiv f(r), \quad (26)$$

$$\begin{aligned} M_{pn}[B_{(m,ik)}[f(r)]] = & -\lambda_p^2 \tilde{f}(\lambda_p) - \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k^2 \int_{R_{k-1}}^{R_k} f(r) V_k(r, \lambda_p) \sigma_k r dr \\ & - a_1^2 R_0 \sigma_1 (\alpha_{11}^0)^{-1} V_1(R_0, \lambda_p) \left(\alpha_{11}^0 \frac{df}{dr} + \beta_{11}^0 f \right) \Big|_{r=R_0} \\ & + a_{n+1}^2 R \sigma_{n+1} (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} V_{n+1}(R, \lambda_p) \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{df}{dr} + \beta_{22}^{n+1} f \right) \Big|_{r=R}. \end{aligned} \quad (27)$$

У формулах (25)–(27) застосовують виписані в [16] спектральну функцію $V(r, \lambda_p)$, вагову функцію $\sigma(r)$ і гібридний диференціальний оператор Бесселя

$$B_{(m,ik)} = \sum_{j=1}^{n+1} a_{rj}^2 \Theta(r - R_{j-1}) \Theta(R_j - r) B_{\nu_{jm,ik}},$$

де α_k^2 — деякі сталі, $\Theta(x)$ — одинична функція Гевісайда, $\{\lambda_p\}_{p=1}^{\infty}$ — монотонно зростаюча послідовність дійсних різних додатних коренів виписаного в явному вигляді трансцендентного рівняння, які утворюють дискретний спектр.

Запишемо диференціальні рівняння (21) і початкові умови (22) у матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_{r1}^2 B_{\nu_{1m,ik}} + q_{1s}^2 \right) u_{1m,ik,s}(t, r) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_{r2}^2 B_{\nu_{2m,ik}} + q_{2s}^2 \right) u_{2m,ik,s}(t, r) \\ \dots \dots \dots \left(\frac{\partial}{\partial t} - a_{r,n+1}^2 B_{\nu_{n+1,m,ik}} + q_{n+1,s}^2 \right) u_{n+1,m,ik,s}(t, r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{1m,ik,s}(t, r) \\ P_{2m,ik,s}(t, r) \\ \dots \dots \dots P_{n+1,m,ik,s}(t, r) \end{bmatrix}, \quad (28)$$

$$\begin{bmatrix} u_{1m,ik,s}(t, r) \\ u_{2m,ik,s}(t, r) \\ \dots \dots \dots u_{n+1,m,ik,s}(t, r) \end{bmatrix} \Big|_{t=0} = \begin{bmatrix} g_{1m,ik,s}(r) \\ g_{2m,ik,s}(r) \\ \dots \dots \dots g_{n+1,m,ik,s}(r) \end{bmatrix}, \quad (29)$$

де $q_{js}^2 = a_{zj}^2 \gamma_s^2 + \chi_j^2$, $j = \overline{1, n+1}$.

Інтегральний оператор M_{pn} , який діє за формулою (25), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$M_{pn}[\dots] = \left[\int_{R_0}^{R_1} \dots V_1(r, \lambda_p) \sigma_1 r dr \int_{R_1}^{R_2} \dots V_2(r, \lambda_p) \sigma_2 r dr \right]$$

$$\left[\int_{R_{n-1}}^{R_n} \cdots V_n(r, \lambda_p) \sigma_n r dr \int_{R_n}^R \cdots V_{n+1}(r, \lambda_p) \sigma_{n+1} r dr \right] \quad (30)$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (28), (29). Внаслідок тотожності (27) одержуємо задачу Коші для звичайного лінійного неоднорідного диференціального рівняння 1-го порядку

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n+1} \left(\frac{d}{dt} + \lambda_p^2 + \alpha_j^2 + q_{js}^2 \right) \tilde{u}_{jm,ik,s}(t, \lambda_p) \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{P}_{jm,ik,s}(t, \lambda_p) - a_1^2 R_0 \sigma_1 (\alpha_{11}^0)^{-1} V_1(R_0, \lambda_p) g_{0m,ik,s}(t) \\ &+ a_{n+1}^2 R \sigma_{n+1} (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} V_{n+1}(R, \lambda_p) g_{m,ik,s}(t), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{jm,ik,s}(t, \lambda_p) \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{jm,ik,s}(\lambda_p), \quad (32)$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{jm,ik,s}(t, \lambda_p) &= \int_{R_{j-1}}^{R_j} u_{jm,ik,s}(t, r) V_j(r, \lambda_p) \sigma_j r dr, \quad j = \overline{1, n+1}, \\ \tilde{P}_{jm,ik,s}(t, \lambda_p) &= \int_{R_{j-1}}^{R_j} P_{jm,ik,s}(t, r) V_j(r, \lambda_p) \sigma_j r dr, \quad j = \overline{1, n+1}, \\ \tilde{g}_{jm,ik,s}(\lambda_p) &= \int_{R_{j-1}}^{R_j} g_{jm,ik,s}(r) V_j(r, \lambda_p) \sigma_j r dr, \quad j = \overline{1, n+1}. \end{aligned}$$

Припустимо, не зменшуючи загальності розв'язку задачі, що $\max \{q_{1s}^2, q_{2s}^2, \dots, q_{n+1,s}^2\} = q_{1s}^2$, і покладемо всюди $\alpha_j^2 = q_{1s}^2 - q_{js}^2$, $j = \overline{1, n+1}$. Задача Коші (31), (32) набуває вигляду

$$\frac{d\tilde{u}_{m,ik,s}}{dt} + \Delta(\lambda_p, \gamma_s) \tilde{u}_{m,ik,s} = \tilde{T}_{m,ik,s}(t, \lambda_p), \quad (33)$$

$$\tilde{u}_{m,ik,s}(t, \lambda_p)|_{t=0} = \tilde{g}_{m,ik,s}(\lambda_p), \quad (34)$$

де

$$\tilde{u}_{m,ik,s}(t, \lambda_p) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{jm,ik,s}(t, \lambda_p), \quad \Delta(\lambda_p, \gamma_s) = \lambda_p^2 + a_{z1}^2 \gamma_s^2 + \chi_1^2,$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{p=1}^{n+1} a_{zp}^2 \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} \left[W_{jp,1}^{ik}(t-\tau, r, \rho, \varphi, \alpha, z) w_p^1(\tau, \rho, \alpha) \right. \\
& \left. + W_{jp,2}^{ik}(t-\tau, r, \rho, \varphi, \alpha, z) w_p^2(\tau, \rho, \alpha) \right] \sigma_p \rho d\alpha d\rho d\tau \\
& + \int_0^t \int_0^{\varphi_0} \int_{-l_1}^{l_2} \left[W_{jr,1}^{ik}(t-\tau, r, \varphi, \alpha, z, \xi) g_0(\tau, \alpha, \xi) \right. \\
& \left. + W_{jr,2}^{ik}(t-\tau, r, \varphi, \alpha, z, \xi) g(\tau, \alpha, \xi) \right] d\xi d\alpha d\tau, \quad j = \overline{1, n+1}, \quad (37)
\end{aligned}$$

які визначають єдині розв'язки параболічних початково-крайових задач спряження (1)–(4), (5), (9); (1)–(4), (6), (9); (1)–(4), (7), (9); (1)–(4), (8), (9) при відповідних значеннях ik : (11), (12), (21), (22).

У формулах (37) застосовано компоненти

$$\begin{aligned}
E_{jp}^{ik}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z, \xi) &= \frac{2}{\varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon_m^{ik} N(t, \lambda_q, \gamma_s) \frac{V_j(r, \lambda_q) V_p(\rho, \lambda_q)}{\|V(r, \lambda_q)\|^2} \\
&\times \frac{v_s(z+l_1) v_s(\xi+l_1)}{\|v_s(z+l_1)\|^2} U_{m,ik}(\varphi) U_{m,ik}(\alpha), \quad j = \overline{1, n+1},
\end{aligned}$$

матриці впливу (функції впливу), функції Гріна

$$\begin{aligned}
Q_{jp}^{ik}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) &= \frac{2}{\varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon_m^{ik} N(t-\tau, \lambda_q, \gamma_s) \frac{V_j(r, \lambda_q) V_p(\rho, \lambda_q)}{\|V(r, \lambda_q)\|^2} \\
&\times \frac{v_s(z+l_1) v_s(\xi+l_1)}{\|v_s(z+l_1)\|^2} \Phi_{m,ik}(\tau, \rho, \xi) U_{m,ik}(\varphi),
\end{aligned}$$

компоненти

$$W_{jp,1}^{ik}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z) = E_{jp}^{ik}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z, -l_1)$$

нижньої аплікатної матриці Гріна (нижні аплікатні функції Гріна), компоненти

$$W_{jp,2}^{ik}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z) = E_{jp}^{ik}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z, l_2)$$

верхньої аплікатної матриці Гріна (верхні аплікатні функції Гріна), компоненти

$$W_{jr,1}^{ik}(t, r, \varphi, \alpha, z, \xi) = -a_1^2 R_0 \sigma_1 (\alpha_0^{11})^{-1} E_{j1}^{ik}(t, r, R_0, \varphi, \alpha, z, \xi)$$

лівої радіальної матриці Гріна (ліві радіальні функції Гріна) та компоненти

$$W_{jr,2}^{ik}(t, r, \varphi, \alpha, z, \xi) = a_{n+1}^2 R \sigma_{n+1} (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} E_{j,n+1}^{ik}(t, r, R, \varphi, \alpha, z, \xi)$$

правої радіальної матриці Гріна (праві радіальні функції Гріна) розглянутих параболічних початково-крайових задач.

Проаналізуємо формули (37) залежно від типу крайових умов на гранях кусково-однорідного клиновидного порожнистого циліндра. Розглянемо, наприклад, випадок крайових умов (8). У цьому випадку функції Гріна $Q_{jp}^{22}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi)$ мають вигляд

$$\begin{aligned} Q_{jp}^{22}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) = & \frac{2}{\varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon_m^{22} N(t - \tau, \lambda_q, \gamma_s) \\ & \times \frac{V_j(r, \lambda_q) V_p(\rho, \lambda_q)}{\|V(r, \lambda_q)\|^2} \frac{v_s(z + l_1) v_s(\xi + l_1)}{\|v_s(z + l_1)\|^2} \\ & \times [-g_{4p}(\tau, \rho, \xi) + (-1)^{m+1} w_{4p}(\tau, \rho, \xi)] \cos \frac{\pi m \varphi}{\varphi_0}. \end{aligned}$$

Визначимо тангенціальні функції Гріна, породжені крайовими умовами (8), за формулами

$$\begin{aligned} R_{jp,1}^{22}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) = & -\frac{2}{\varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon_m^{22} N(t - \tau, \lambda_q, \gamma_s) \\ & \times \frac{V_j(r, \lambda_q) V_p(\rho, \lambda_q)}{\|V(r, \lambda_q)\|^2} \frac{v_s(z + l_1) v_s(\xi + l_1)}{\|v_s(z + l_1)\|^2} \cos \frac{\pi m \varphi}{\varphi_0}, \\ R_{jp,2}^{22}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) = & \frac{2}{\varphi_0} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \varepsilon_m^{22} N(t - \tau, \lambda, \gamma_s) \\ & \times \frac{V_j(r, \lambda_q) V_p(\rho, \lambda_q)}{\|V(r, \lambda_q)\|^2} \frac{v_s(z + l_1) v_s(\xi + l_1)}{\|v_s(z + l_1)\|^2} \cos \frac{\pi m \varphi}{\varphi_0}. \end{aligned}$$

Тоді розв'язок задачі (1)–(4), (8), (9) можемо записати у вигляді

$$\begin{aligned} u_{j,22}(t, r, \varphi, z) = & \sum_{p=1}^{n+1} \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} \int_{-l_1}^{l_2} E_{jp}^{22}(t - \tau, r, \rho, \varphi, \alpha, z, \xi) f_p(\tau, \rho, \alpha, \xi) \sigma_p \rho d\xi d\alpha d\rho d\tau \\ & + \sum_{p=1}^{n+1} \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} \int_{-l_1}^{l_2} E_{jp}^{22}(t, r, \rho, \varphi, \alpha, z, \xi) g_p(\rho, \alpha, \xi) \sigma_p \rho d\xi d\alpha d\rho \\ & + \sum_{p=1}^{n+1} a_{\varphi p}^2 \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_{-l_1}^{l_2} \left[R_{jp,1}^{22}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) g_{4p}(\tau, \rho, \xi) \right. \\ & \left. + R_{jp,2}^{22}(t, \tau, r, \rho, \varphi, z, \xi) w_{4p}(\tau, \rho, \xi) \right] \sigma_p \rho^{-1} d\xi d\rho d\tau \\ & + \sum_{p=1}^{n+1} a_{zp}^2 \int_0^t \int_{R_{p-1}}^{R_p} \int_0^{\varphi_0} \left[W_{jp,1}^{22}(t - \tau, r, \rho, \varphi, \alpha, z) w_p^1(\tau, \rho, \alpha) \right. \\ & \left. + W_{jp,2}^{22}(t - \tau, r, \rho, \varphi, \alpha, z) w_p^2(\tau, \rho, \alpha) \right] \sigma_p \rho d\alpha d\rho d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t \int_0^{\varphi_0} \int_{-l_1}^{l_2} \left[W_{jr,1}^{22}(t-\tau, r, \varphi, \alpha, z, \xi) g_0(\tau, \alpha, \xi) \right. \\
& \left. + W_{jr,2}^{22}(t-\tau, r, \varphi, \alpha, z, \xi) g(\tau, \alpha, \xi) \right] d\xi d\alpha d\tau, \quad j = \overline{1, n+1}. \quad (38)
\end{aligned}$$

З використанням властивостей функцій впливу і функцій Гріна безпосередньо перевіряємо, що функції $u_{j,22}(t, \tau, \varphi, z)$, визначені формулами (38), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (4), (8) і умови спряження (9) у сенсі теорії узагальнених функцій [21].

Єдиність розв'язку (38) впливає з його структури (інтегрального зображення) та єдиності головних розв'язків (функцій впливу і функцій Гріна) параболічної початково-крайової задачі спряження (1)–(4), (8), (9).

Методами з [21, 22] можна довести, що при відповідних умовах на вихідні дані формули (38) визначають обмежений класичний розв'язок розглянутої задачі.

Підсумком викладеного вище є така теорема.

Теорема. Якщо функції $f_j(t, r, \varphi, z)$, $g_j(r, \varphi, z)$, $w_j^s(t, r, \varphi)$, $s = 1, 2$, $g_{4j}(t, r, z)$, $w_{4j}(t, r, z)$, $j = \overline{1, n+1}$:

1) неперервно диференційовні за змінною t і двічі неперервно диференційовні за геометричними змінними;

2) мають обмежену варіацію за геометричними змінними;

3) задовольняють умови спряження, функції $g_0(t, \varphi, z)$, $g(t, \varphi, z)$ задовольняють умови 1, 2,

то параболічна початково-крайова задача (1)–(4), (8), (9) має єдиний обмежений класичний розв'язок, який визначено за формулами (38).

Випадки крайових умов (5)–(7) на гранях клина $\varphi = 0$, $\varphi = \varphi_0$ можна проаналізувати аналогічно.

Зауваження. 1. У випадку $a_{rj} = a_{\varphi j} = a_{zj} \equiv a_j > 0$ формули (37) визначають структури розв'язків розглянутих задач в ізотропному кусково-однорідному клиновидному порожнистому циліндрі.

2. Випадок зміни φ в межах $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ зводиться до розглянутого заміною $\varphi' = \varphi - \varphi_1$, $\varphi_0 \equiv \varphi_2 - \varphi_1$.

3. Параметри α_{11}^0 , β_{11}^0 , α_{22}^{n+1} , β_{22}^{n+1} дозволяють виділяти з формул (37) розв'язки початково-крайових задач спряження у випадках задання на радіальних поверхнях $r = R_0$, $r = R$ крайових умов 1, 2 і 3-го роду та їхніх можливих комбінацій 1–1; 1–2; 1–3; 2–1; 2–2; 2–3; 3–1; 3–2; 3–3.

4. Параметри p_1 , p_2 дозволяють виділяти з формул (37) розв'язки початково-крайових задач у випадках задання на площинах $z = -l_1$, $z = l_2$ крайових умов 1-го роду ($p_1 \rightarrow +\infty$, $p_2 \rightarrow +\infty$), 2-го роду ($p_1 \rightarrow 0$, $p_2 \rightarrow 0$) та їхніх можливих комбінацій.

5. Аналіз формул (37) залежно від аналітичного виразу функцій $f_j(t, r, \varphi, z)$, $g_j(r, \varphi, z)$, $w_j^s(t, r, \varphi)$, $s = 1, 2$, $g_{pj}(t, r, z)$, $w_{pj}(t, r, z)$, $p = \overline{1, 4}$, $j = \overline{1, n+1}$, $g_0(t, \varphi, z)$, $g(t, \varphi, z)$ проводимо безпосередньо із загальних структур.

4. Висновки. За допомогою методу класичних інтегральних перетворень Фур'є та гібридних інтегральних перетворень типу Ганкеля 2-го роду у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) вперше побудовано єдині точні аналітичні

розв'язки параболічних початково-крайових задач спряження в кусково-однорідному клиновидному порожнистому циліндрі. Одержані інтегральні зображення розв'язків носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів і даних задачі та можуть бути використані як в подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків математичних моделей еволюційних процесів у кусково-однорідних середовищах, які описано циліндричною системою координат.

Від імені всіх авторів відповідальна за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів.

Література

1. В. В. Городецький, *Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу*, Рута, Чернівці (1998).
2. Н. В. Житарашу, С. Д. Эйдельман, *Параболические граничные задачи*, Штиинца, Кишинев (1992).
3. Т. Я. Загорский, *Смешанные задачи для систем дифференциальных уравнений с частными производными параболического типа*, Изд-во ЛГУ, Львов (1961).
4. С. Д. Ивасишен, *Матрица Грина параболических задач*, Вища шк., Киев (1990).
5. М. І. Матійчук, *Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями*, Прут, Чернівці (2003).
6. І. Д. Пукальський, *Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженостями і особливостями*, Рута, Чернівці (2008).
7. А. Фридман, *Уравнения с частными производными параболического типа*, Мир, Москва (1968).
8. С. Д. Эйдельман, *Параболические системы*, Наука, Москва (1964).
9. В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, *Модели и методы решения задач в неоднородных средах*, Наук. думка, Киев (2001).
10. В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, *Модели и методы решения задач с условиями сопряжения*, Наук. думка, Киев (1998).
11. И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека, *Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах*, Наук. думка, Киев (1991).
12. І. М. Конет, М. П. Ленюк, *Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях*, Прут, Чернівці (2001).
13. І. М. Конет, *Гіперболічні крайові задачі математичної фізики в кусково-однорідних просторових середовищах*, Абетка-Світ, Кам'янець-Подільський (2013).
14. І. М. Конет, Т. М. Пилипюк, *Параболічні крайові задачі в кусково-однорідних середовищах*, Абетка-Світ, Кам'янець-Подільський (2016).
15. І. М. Конет, Т. М. Пилипюк, *Параболічні крайові задачі в кусково-однорідних циліндрично-кругових середовищах*, Абетка-Світ, Кам'янець-Подільський (2017).
16. І. М. Конет, Т. М. Пилипюк, *Крайові задачі в кусково-однорідних циліндрично-кругових середовищах*, Технодрук, Чернівці (2019).
17. А. П. Громик, І. М. Конет, *Гіперболічні крайові задачі математичної фізики в кусково-однорідних циліндрично-кругових середовищах*, Абетка світ, Кам'янець-Подільський (2020).
18. А. П. Громик, І. М. Конет, Т. М. Пилипюк, *Параболічні крайові задачі математичної фізики в кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому шарі*, Нелін. коливання, **24**, № 4, 460–472 (2021).
19. А. П. Громик, І. М. Конет, Т. М. Пилипюк, *Параболічні крайові задачі в кусково-однорідному клиновидному суцільному циліндрі*, Буковин. мат. журн., **8**, № 2, 41–55 (2020).
20. М. О. Перестюк, В. В. Маринець, *Теорія рівнянь математичної фізики*, Либідь, Київ (2006).
21. Г. Е. Шилов, *Математический анализ. Второй специальный курс*, Наука, Москва (1965).
22. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений*, Физматгиз, Москва (1958).

Одержано 26.01.23