

НЕЛОКАЛЬНА ЗА ЧАСОМ ЗАДАЧА ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ПСЕВДОДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ ОПЕРАТОРАМИ У ПРОСТОРАХ ТИПУ S

Василь Городецький, Ольга Мартинюк, Руслана Колісник

*Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці
вул. Коцюбинського, 2, Чернівці, 58012, Україна*

e-mail: v.gorodetskiy@chnu.edu.ua,

o.martynyuk@chnu.edu.ua, відповідальна за листування,

r.kolisnyk@chnu.edu.ua

We consider evolutionary equations with fractional differentiation operators restrictions of which to certain spaces of S type coincide with pseudodifferential operators constructed on the basis of smooth symbols, which are multipliers in these spaces. The well-posedness of the time-nonlocal multipoint problem for these equations with initial function, which is an element of the space of generalized functions of the ultradistribution type, is established. We establish that the solutions of these problems stabilize to zero in the spaces of generalized functions of type S' (weak stabilization) and also stabilize to zero uniformly on $\mathbb{R}$ in the case where the initial generalized function has a bounded support.

Розглянуто еволюційні рівняння з операторами дробового диференціювання, звуження яких на певні простори типу S збігаються із псевдодиференціальними операторами, побудованими за гладкими символами, які є мультиплікаторами у таких просторах. Встановлено коректну розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для таких рівнянь з початковою функцією, яка є елементом простору узагальнених функцій типу ультрарозподілів. Встановлено, що розв'язки таких задач стабілізуються до нуля у просторах узагальнених функцій типу S' (слабка стабілізація), а також стабілізуються до нуля рівномірно на $\mathbb{R}$ у випадку, коли початкова узагальнена функція має обмежений носій.

У теорії дробового інтегро-диференціювання використовують оператор $A := \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^{1/2}$, який у літературі прийнято називати оператором Бесселя дробового диференціювання порядку $\frac{1}{2}$ [1]. У цій статті розглядаємо сім'ю операторів $\{B_{p,\omega}\}$ вигляду

$$B_{p,\omega} = \left(I + \sum_{k=1}^p (-1)^k \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}}\right)^{\frac{\omega}{2p}},$$

де $\omega \in (0, 1]$, $p \in \mathbb{N}$ — довільно фіксовані числа. До цього класу належить і оператор A ; легко бачити, що $A = B_{1,1}$. Інші приклади операторів $B_{p,\omega}$:

$$B_{2,\frac{4}{7}} = \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^4}\right)^{\frac{1}{7}},$$

$$B_{3, \frac{4}{5}} = \left(I - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{\partial^6}{\partial x^6} \right)^{\frac{2}{15}}.$$

Встановлено, що $B_{p, \omega}$ — самоспряжений оператор у гільбертовому просторі $L_2(\mathbb{R})$ (при фіксованих p, ω), звуження якого на певний простір S_α^β , який відноситься до просторів типу S (простори типу S введено в [2]), збігається із псевдодиференціальним оператором на S_α^β , побудованим за функцією-символом

$$\varphi_{p, \omega}(\sigma) = (1 + \sigma^2 + \sigma^4 + \dots + \sigma^{2p})^{\frac{\omega}{2p}}, \quad \sigma \in \mathbb{R},$$

тобто

$$\hat{B} := B_{p, \omega}|_{S_\alpha^\beta} = F_{\sigma \rightarrow x}^{-1}[\varphi_{p, \omega}(\sigma)F_{x \rightarrow \sigma}],$$

де F, F^{-1} — пряме та обернене перетворення Фур'є. Досліджено також нелокальну за часом задачу для рівняння

$$\partial u(t, x)/\partial t + \hat{B}u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}, \quad (1)$$

коли початкову умову $u|_{t=0} = f$ замінюють умовою

$$\sum_{k=0}^m \mu_k B_k u(t, x)|_{t=t_k} = f, \quad (2)$$

де $t_0 = 0, \{t_1, \dots, t_m\} \subset (0, +\infty), \{\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m\} \subset (0, +\infty), m \in \mathbb{N}$, — фіксовані числа, $B_0 = I, B_1, \dots, B_m$ — псевдодиференціальні оператори, побудовані за гладкими символами (якщо $\mu_0 = 1, \mu_1 = \dots = \mu_m = 0$, то маємо, очевидно, задачу Коші, тобто задачу (1), (2) можна розуміти як певне узагальнення задачі Коші для рівняння (1)). Умову (2) трактуємо в класичному або слабкому сенсі, якщо f — узагальнена функція типу ультрарозподілів (тобто $f \in$ елементу простору $(S_\alpha^\beta)'$ — простору, топологічно спряженого до простору S_α^β).

Зауважимо, що нелокальну багатоточкову за часом задачу відносять до нелокальних задач для диференціально-операторних рівнянь і рівнянь із частинними похідними. Такі задачі виникають при моделюванні багатьох процесів і задач практики крайовими задачами з нелокальними умовами, описі всіх коректних задач для конкретного оператора, побудові загальної теорії крайових задач [3–7].

У роботі встановлено розв'язність задачі (1), (2), досліджено: а) властивості фундаментального розв'язку цієї багатоточкової задачі; б) поведінку розв'язку задачі (1), (2) при $t \rightarrow +\infty$ (стабілізація розв'язку) у просторах узагальнених функцій типу ультрарозподілів, а також рівномірну стабілізацію до нуля на $\mathbb{R}$ розв'язку задачі (1), (2).

1. Простори основних функцій. І. М. Гельфанд і Г. Є. Шилов у [2] ввели серію просторів, названих просторами типу S . Ці простори складаються з нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, на які накладено певні умови спадання на нескінченності та зростання похідних. Ці умови задають за допомогою нерівностей

$$|x^k \varphi^{(m)}(x)| \leq c_{km}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+,$$

де $\{c_{km}\}$ — подвійна послідовність додатних чисел. Якщо на елементи послідовності $\{c_{km}\}$ не накладено жодних обмежень, то маємо, очевидно, простір Шварца $S \equiv S(\mathbb{R})$ швидко спадних на нескінченності функцій. Якщо ж числа c_{km} задовольняють певні умови, то відповідні простори містяться в S і називаються просторами типу S . Означимо деякі з них.

Для будь-яких $\alpha, \beta > 0$ покладемо

$$S_{\alpha}^{\beta}(\mathbb{R}) \equiv S_{\alpha}^{\beta} := \left\{ \varphi \in S \mid \exists c > 0 \ \exists A > 0 \ \exists B > 0 \ \forall \{m, n\} \subset \mathbb{Z}_+ \ \forall x \in \mathbb{R} : \right. \\ \left. |x^m \varphi^{(n)}(x)| \leq c A^m B^n m^{\alpha} n^{\beta} \right\}. \quad (3)$$

Уведені простори можна охарактеризувати ще й так [2]:

– S_{α}^{β} складається з тих і лише тих нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, які задовольняють нерівності

$$|\varphi^{(n)}(x)| \leq c B^n n^{\beta} \exp \{-a|x|^{1/\alpha}\}, \quad c, B, a > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad (4)$$

де сталі $c, a, B > 0$ залежать лише від функції φ ;

– якщо $0 < \beta < 1$ і $\alpha \geq 1 - \beta$, то S_{α}^{β} складається з тих і лише тих функцій $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, які аналітично продовжуються у комплексну площину $\mathbb{C}$ і для яких справджується нерівність

$$|\varphi(x + iy)| \leq c \exp \{-a|x|^{1/\alpha} + b|y|^{1/(1-\beta)}\}, \quad c, a, b > 0, \quad \{x, y\} \subset \mathbb{R}.$$

Простір S_{α}^1 складається з функцій $\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$, які аналітично продовжуються у деяку смугу $|\operatorname{Im} z| < \delta$, $z = x + iy$ (залежну від φ) комплексної площини, при цьому справджується оцінка

$$|\varphi(x + iy)| \leq c \exp \{-a|x|^{1/\alpha}\}, \quad c, a > 0, \quad |y| < \delta \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Простори S_{α}^{β} нетривіальні, якщо $\alpha + \beta \geq 1$ і утворюють щільні в $L_2(\mathbb{R})$ множини.

Топологічна структура в S_{α}^{β} визначається таким чином. Символом $S_{\alpha, A}^{\beta, B}$, $A, B > 0$, позначимо сукупність функцій $\varphi \in S_{\alpha}^{\beta}$, які задовольняють умову

$$\forall \bar{A} > A \quad \forall \bar{B} > B: \quad |x^k \varphi^{(m)}(x)| \leq \bar{A}^k \bar{B}^m k^{\alpha} m^{\beta}, \quad \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ця множина перетворюється у повний зліченно-нормований простір, якщо норми у ній введено за допомогою співвідношень

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{x, k, m} \frac{|x^k \varphi^{(m)}(x)|}{(A + \delta)^k (B + \rho)^m k^{\alpha} m^{\beta}}, \quad \{\delta, \rho\} \in \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}.$$

Указану систему норм іноді заміняють еквівалентною їй системою норм

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} = \sup_{x, m} \frac{\exp\{a(1 - \delta)|x|^{1/\alpha}\} |\varphi^{(m)}(x)|}{(B + \rho)^m m^{\beta}},$$

$$\{\delta, \rho\} \subset \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}, \quad a = \frac{\alpha}{eA^{1/\alpha}}.$$

Якщо $A_1 < A_2$, $B_1 < B_2$, то $S_{\alpha, A_1}^{\beta, B_1}$ неперервно вкладається в $S_{\alpha, A_2}^{\beta, B_2}$ і $S_{\alpha}^{\beta} = \bigcup_{A, B > 0} S_{\alpha, A}^{\beta, B}$, тобто в S_{α}^{β} вводимо топологію індуктивної границі просторів $S_{\alpha, A}^{\beta, B}$ [2]. Отже, збіжність до нуля послідовності $\{\varphi_{\nu}, \nu \geq 1\} \subset S_{\alpha}^{\beta}$ у просторі S_{α}^{β} — це збіжність до нуля за топологією одного з просторів $S_{\alpha, A}^{\beta, B}$, до якого належать всі функції φ_{ν} . Іншими словами (див. [2]), $\varphi_{\nu} \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow +\infty$ у просторі S_{α}^{β} тоді й лише тоді, коли послідовність $\{\varphi_{\nu}^{(m)}, \nu \geq 1\}$ при кожному $m \in \mathbb{Z}_+$ збігається рівномірно до нуля на кожному відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$ і для деяких $c, a, B > 0$, не залежних від ν , виконується нерівність

$$|\varphi_{\nu}^{(m)}(x)| \leq cB^m m^{m\beta} \exp\{-a|x|^{1/\alpha}\}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Множина $F \subset S_{\alpha}^{\beta}$ називається обмеженою, якщо вона міститься в деякому зліченно-нормованому просторі $S_{\alpha, A}^{\beta, B}$ і в ньому обмежена, тобто якщо для всіх функцій $\varphi \in F$ мають місце оцінки (3) (або (4)) з одними й тими ж сталими $c, A, B > 0$ ($c, a, B > 0$).

У просторах S_{α}^{β} клас лінійних обмежених операторів збігається з класом лінійних неперервних операторів [2].

Функція $g \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ називається мультиплікатором у просторі S_{α}^{β} , якщо $g\psi \in S_{\alpha}^{\beta}$ для довільної функції $\psi \in S_{\alpha}^{\beta}$ і відображення $\psi \rightarrow g\psi$ є лінійним і неперервним оператором в S_{α}^{β} .

У просторах S_{α}^{β} визначено й неперервну операцію зсуву аргументу $T_x: \varphi(\xi) \rightarrow \varphi(\xi + x)$ $\forall \varphi \in S_{\alpha}^{\beta}$. Ця операція є також диференційовною (навіть нескінченно диференційовною [2]) у розумінні, що граничні співвідношення вигляду

$$(\varphi(x+h) - \varphi(x))h^{-1} \rightarrow \varphi'(x), \quad h \rightarrow 0,$$

виконуються для кожної функції $\varphi \in S_{\alpha}^{\beta}$ у сенсі збіжності за топологією простору S_{α}^{β} . У S_{α}^{β} визначено й неперервну операцію диференціювання. Простори типу S є досконалими [2] (тобто просторами, всі обмежені множини яких компактні). Вони пов'язані між собою перетворенням Фур'є, а саме: правильною є формула $F[S_{\alpha}^{\beta}] = S_{\beta}^{\alpha}$, де

$$F[S_{\alpha}^{\beta}] := \left\{ \psi: \psi(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) e^{i\sigma x} dx, \quad \varphi \in S_{\alpha}^{\beta} \right\},$$

при цьому оператор $F: S_{\alpha}^{\beta} \rightarrow S_{\beta}^{\alpha}$ неперервний.

2. Оператори $B_{p, \omega}$ у просторах типу S . Нагадаємо, що $A_0 := i\partial/\partial x$ — самоспряжений у $L_2(\mathbb{R})$ оператор зі щільною у $L_2(\mathbb{R})$ областю визначення

$$\mathcal{D}(A_0) = \{\psi \in L_2(\mathbb{R}) : \exists \psi' \in L_2(\mathbb{R})\}.$$

Якщо E_{λ} , $\lambda \in \mathbb{R}$, — спектральна функція оператора A_0 , то внаслідок основної спектральної теореми для самоспряжених операторів

$$A_0 \psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_{\lambda} \psi \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(A_0).$$

Згідно з операційним численням, пов'язаним з побудовою функцій від самоспряженого оператора, маємо

$$\begin{aligned} B_{p,\omega}\psi &= \left(I + \sum_{k=1}^p (-1)^k \frac{\partial^{2k}}{\partial x^{2k}} \right)^{\frac{\omega}{2p}} \psi \\ &= \left(I + \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right)^4 + \dots + \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right)^{2p} \right)^{\frac{\omega}{2p}} \psi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + \lambda^2 + \dots + \lambda^{2p})^{\frac{\omega}{2p}} dE_{\lambda} \psi = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{p,\omega}(\lambda) dE_{\lambda} \psi \\ &= \varphi_{p,\omega} \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) \psi \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(B_{p,\omega}), \end{aligned}$$

де

$$\varphi_{p,\omega}(\lambda) = (1 + \lambda^2 + \lambda^4 + \dots + \lambda^{2p})^{\frac{\omega}{2p}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Оскільки $\varphi_{p,\omega}$ — дійснозначна функція, то оператор $B_{p,\omega} = \varphi_{p,\omega} \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right)$ також самоспряжений у $L_2(\mathbb{R})$. Відомо (див., наприклад, [8]), що

$$E_{\lambda} \psi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\lambda} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\tau) e^{i\sigma\tau} d\tau \right\} e^{-it\sigma} d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\lambda} F[\psi](\sigma) e^{-it\sigma} d\sigma.$$

Отже, $dE_{\lambda} \psi = \frac{1}{2\pi} F[\psi](\lambda) e^{-it\lambda} d\lambda$, тобто

$$B_{p,\omega} \psi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{p,\omega}(\lambda) F[\psi](\lambda) e^{-it\lambda} d\lambda = F^{-1}[\varphi_{p,\omega}(\lambda) F[\psi]]. \quad (5)$$

Лема 1. Функція $\varphi_{p,\omega}$ — мультиплікатор у просторі $S_{1/\omega}^1$, $\omega \in (0, 1]$, $p \in \mathbb{N}$ — фіксовані числа.

Доведення. Для доведення твердження досить переконатися в тому, що: 1) $\varphi_{p,\omega} \psi \in S_{1/\omega}^1 \quad \forall \psi \in S_{1/\omega}^1$; 2) відображення $\psi \rightarrow \varphi_{p,\omega} \psi$ є неперервним оператором у просторі $S_{1/\omega}^1$.

Доведемо властивість 1). Очевидно, що коли $|\sigma| \leq 1$, тоді функція $\varphi_{p,\omega}$ задовольняє нерівність

$$\varphi_{p,\omega}(\sigma) \leq (1 + p)^{\frac{\omega}{2p}} \leq 1 + p.$$

Якщо $|\sigma| > 1$, то для довільно фіксованого $\varepsilon > 0$

$$\varphi_{p,\omega}(\sigma) \leq ((1 + p)|\sigma|^{2p})^{\frac{\omega}{2p}} = (1 + p)^{\frac{\omega}{2p}} |\sigma|^{\omega} \leq \frac{c(p)}{\varepsilon} e^{\varepsilon|\sigma|^{\omega}}, \quad c(p) = 1 + p.$$

Отже,

$$\varphi_{p,\omega}(\sigma) \leq c_{\varepsilon} e^{\varepsilon|\sigma|^{\omega}}, \quad \sigma \in \mathbb{R}, \quad c_{\varepsilon} = (1 + p) \max \left\{ 1, \frac{1}{\varepsilon} \right\} \quad (6)$$

для довільно фіксованого $\varepsilon > 0$.

Безпосередньо можна переконатися в тому, що

$$|D_\sigma^m \varphi_{p,\omega}(\sigma)| \leq c_0 L_0^m m! \leq c_1 L_1^m m^m, \quad (7)$$

де сталі $c_0, c_1, L_0, L_1 > 0$ залежать від p .

Нехай $F \subset S_{1/\omega}^1$ — обмежена множина, ψ — довільна функція з множини F . Тоді існують сталі $c, a, B > 0$ (не залежні від ψ) такі, що

$$|D_\sigma^m \psi(\sigma)| \leq c B^m m^m e^{-a|\sigma|^\omega}, \quad \sigma \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{Z}_+. \quad (8)$$

З (6)–(8) і формули Лейбніца диференціювання добутку двох функцій випливають нерівності

$$\begin{aligned} |(\varphi_{p,\omega}(\sigma)\psi(\sigma))^{(m)}| &= \left| \sum_{k=0}^m C_m^k \varphi_{p,\omega}^{(k)}(\sigma) \psi^{(m-k)}(\sigma) \right| \\ &\leq |\varphi_{p,\omega}(\sigma)| |\psi^{(m)}(\sigma)| + \sum_{k=1}^m C_m^k |\varphi_{p,\omega}^{(k)}(\sigma)| |\psi^{(m-k)}(\sigma)| \\ &\leq c_\varepsilon c B^m m^m e^{-(a-\varepsilon)|\sigma|^\omega} + c_1 c \sum_{k=1}^m C_m^k L_1^k k^k B^{m-k} (m-k)^{m-k} e^{-a|\sigma|^\omega} \\ &\leq c_\varepsilon c B^m m^m e^{-(a-\varepsilon)|\sigma|^\omega} + c_2 B_1^m m^m e^{-a|\sigma|^\omega}, \end{aligned}$$

де $B_1 = 2 \max\{L_1, B\}$, $c_2 = c_1 c$. Якщо покласти $\varepsilon = a/2$, то одержимо оцінку

$$|(\varphi_{p,\omega}(\sigma)\psi(\sigma))^{(m)}| \leq \tilde{c} \tilde{B}^m m^m e^{-\tilde{a}|\sigma|^\omega}, \quad \sigma \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{Z}_+ \quad \forall \psi \in F, \quad (9)$$

де $\tilde{c} = \max\{c_\varepsilon c, c_2\}$, $\tilde{B} = \max\{B, B_1\}$, $\tilde{a} = a/2$. З останньої нерівності випливає властивість 1), а також те, що $\varphi_{p,\omega} F \subset S_{1/\omega}^1$ — обмежена множина, тобто оператор $\psi \rightarrow \varphi_{p,\omega} \psi$ кожен обмежену множину простору $S_{1/\omega}^1$ переводить у обмежену множину цього ж простору. Отже, вказаний оператор є обмеженим (неперервним). Цим довели, що $\varphi_{p,\omega}$ — мультиплікатор у просторі $S_{1/\omega}^1$.

Лему 1 доведено.

Зауваження 1. З (9) випливає, що $\varphi_{p,\omega}$ — мультиплікатор і в кожному просторі $S_{1/\omega}^\gamma$, де $\gamma > 1$ (конкретне значення γ вкажемо пізніше). Нехай $\hat{B} = B_{p,\omega}|_{S_{1/\omega}^\gamma}$ — звуження оператора $B_{p,\omega}$ на простір $S_{1/\omega}^\gamma$. Якщо в (5) $\psi \in S_{1/\omega}^{1/\omega}$, то $F[\psi] \in S_{1/\omega}^\gamma$, $\varphi_{p,\omega} F[\psi] \in S_{1/\omega}^\gamma$. Тоді $\hat{B}\psi \in S_{1/\omega}^{1/\omega} \quad \forall \psi \in S_{1/\omega}^{1/\omega}$. Отже, оператор

$$\hat{B}: S_{1/\omega}^{1/\omega} \rightarrow S_{1/\omega}^{1/\omega}$$

збігається із псевдодиференціальним оператором у просторі $S_{1/\omega}^{1/\omega}$, побудованим за функцією-символом $\varphi_{p,\omega}: \hat{B} = F^{-1}[\varphi_{p,\omega}(\sigma)F]$.

3. Простори узагальнених функцій. Символом $(S_\alpha^\beta)'$ позначатимемо простір усіх лінійних неперервних функціоналів на S_α^β зі слабкою збіжністю. Елементи простору $(S_\alpha^\beta)'$ називатимемо узагальненими функціями типу ультрарозподілів. Якщо $f \in (S_\alpha^\beta)'$, то до цього ж простору належить також кожна похідна $f^{(p)}$, $p \in \mathbb{N}$, де $f^{(p)}$ визначаємо за формулою

$$\langle f^{(p)}, \psi \rangle := (-1)^p \langle f, \psi^{(p)} \rangle \quad \forall \psi \in S_\alpha^\beta$$

(тут $\langle f^{(p)}, \psi \rangle$ позначає дію функціонала $f^{(p)}$ на основну функцію ψ). Якщо g — мультиплікатор у просторі основних функцій S_α^β , то $gf \in (S_\alpha^\beta)'$ $\forall f \in (S_\alpha^\beta)'$, де

$$\langle gf, \psi \rangle := \langle f, g\psi \rangle \quad \forall \psi \in S_\alpha^\beta.$$

Оскільки в основному просторі S_α^β визначено операцію зсуву T_x , то згортку узагальненої функції $f \in (S_\alpha^\beta)'$ із основною функцією визначимо за допомогою формули

$$(f * \varphi)(x) := \langle f_\xi, T_{-x}\varphi \rangle \equiv \langle f, \varphi(x - \cdot) \rangle, \quad \varphi(\xi) := \varphi(-\xi), \quad \varphi \in S_\alpha^\beta.$$

Із властивості нескінченної диференційовності операції зсуву аргументу у просторі S_α^β випливає, що згортка $f * \varphi$ є звичайною нескінченно диференційовною на $\mathbb{R}$ функцією.

Перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in (S_\alpha^\beta)'$ визначаємо за допомогою співвідношення

$$\langle F[f], \varphi \rangle := \langle f, F[\varphi] \rangle \quad \forall \varphi \in S_\beta^\alpha,$$

при цьому $F[f] \in (S_\beta^\alpha)'$, оператор $F: (S_\alpha^\beta)' \rightarrow (S_\beta^\alpha)'$ є неперервним.

Нехай $f \in (S_\alpha^\beta)'$. Якщо $f * \varphi \in S_\alpha^\beta$ $\forall \varphi \in S_\alpha^\beta$, і із співвідношення $\varphi_\nu \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$ за топологією простору S_α^β випливає, що $f * \varphi_\nu \rightarrow 0$ при $\nu \rightarrow \infty$ за топологією простору S_α^β , то функціонал f називаємо *згортувачем* у просторі S_α^β .

Якщо $f \in (S_\alpha^\beta)'$ — згортувач у просторі S_α^β , то для довільної основної функції $\varphi \in S_\alpha^\beta$ правильною є формула

$$F[f * \varphi] = F[f] F[\varphi],$$

де $F[f]$ — мультиплікатор у просторі S_β^α .

4. Нелокальна за часом задача. Розглянемо еволюційне рівняння

$$\partial u(t, x) / \partial t + \hat{B}u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R} \equiv \Omega, \quad (10)$$

де $\hat{B} = B_{p, \omega}|_{S_2^{1/\omega}}$, $\omega \in (0, 1]$, $p \in \mathbb{N}$, — фіксовані числа, при цьому (див. п. 2) $\hat{B} = F^{-1}[\varphi_{p, \omega} F]$.

Під розв'язком рівняння (10) розуміємо функцію $u(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, яка має такі властивості:

- 1) $u(\cdot, x) \in C^1(0, +\infty)$ при кожному $x \in \mathbb{R}$;
- 2) $u(t, \cdot) \in S_2^{1/\omega}$ при кожному $t \in (0, +\infty)$;
- 3) $u(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, задовольняє рівняння (10).

Для рівняння (10) поставимо нелокальну багатоточкову за часом задачу: знайти розв'язок рівняння (10), який задовольняє умову

$$\mu u(0, x) - \mu_1 B_1 u(t_1, x) - \dots - \mu_m B_m u(t_m, x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad f \in S_2^{1/\omega}, \quad (11)$$

де $u(0, x) := \lim_{t \rightarrow +0} u(t, x)$, $x \in \mathbb{R}$, $\{\mu, \mu_1, \dots, \mu_m\} \subset (0, +\infty)$, $\{t_1, \dots, t_m\} \subset (0, \infty)$, $m \in \mathbb{N}$ — фіксовані числа, $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m < +\infty$, $\mu > \sum_{k=1}^m \mu_k$, $B_1, \dots, B_m$ — псевдодиференціальні оператори, побудовані за функціями (символами) $g_k: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ відповідно:

$$B_k = F^{-1}[g_k(\sigma)F], \quad k \in \{1, \dots, m\}.$$

Функції g_k , $k \in \{1, \dots, m\}$, задовольняють умови:

$$g_k \in C^\infty(\mathbb{R});$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \sigma \in \mathbb{R}: g_k(\sigma) \leq \exp\{\varepsilon|\sigma|^\omega\},$$

$$\exists M_k > 0 \quad \forall s \in \mathbb{N}: |D_\sigma^s g_k(\sigma)| \leq M_k^s s!.$$

Зауважимо, що з наведених властивостей функцій g_k випливає, що g_k , $k \in \{1, \dots, m\}$, — мультиплікатор у просторі $S_2^{1/\omega}$.

Введемо позначення $a(\sigma) := \varphi_{p,\omega}(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}$.

Розв'язок задачі (10), (11) шукаємо за допомогою перетворення Фур'є, ввівши позначення $F[u(t, x)] = v(t, \sigma)$. Врахувавши вигляд операторів $B_1, \dots, B_m$, для функції $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ одержимо задачу з параметром σ :

$$\frac{dv(t, \sigma)}{dt} + a(\sigma)v(t, \sigma) = 0, \quad (t, \sigma) \in \Omega, \quad (12)$$

$$\mu v(0, \sigma) - \sum_{k=1}^m \mu_k g_k(\sigma) v(t, \sigma) = \tilde{f}(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}, \quad (13)$$

де $\tilde{f}(\sigma) = F[f](\sigma)$. Загальний розв'язок рівняння (12) має вигляд

$$v(t, \sigma) = c \exp\{-ta(\sigma)\}, \quad (t, \sigma) \in \Omega, \quad (14)$$

де $c = c(\sigma)$ визначимо з умови (13). Підставивши (14) у (13), знайдемо

$$c = \tilde{f}(\sigma) \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k g_k(\sigma) \exp\{-t_k a(\sigma)\} \right)^{-1}, \quad \sigma \in \mathbb{R}.$$

Введемо позначення

$$G(t, x) = F^{-1}[Q(t, \sigma)], \quad Q(t, \sigma) = Q_1(t, \sigma)Q_2(\sigma), \quad Q_1(t, \sigma) = \exp\{-ta(\sigma)\},$$

$$Q_2(\sigma) = \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k g_k(\sigma) \exp\{-t_k a(\sigma)\} \right)^{-1}.$$

Далі, міркуючи формально, прийдемо до співвідношення

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} G(t, x - \xi) f(\xi) d\xi = G(t, x) * f(x).$$

Справді,

$$\begin{aligned} u(t, x) &= (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} Q(t, \sigma) \left(\int_{\mathbb{R}} f(\xi) e^{i\sigma\xi} d\xi \right) e^{-i\sigma x} d\sigma \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left((2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} Q(t, \sigma) e^{-i\sigma(x-\xi)} d\sigma \right) f(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} G(t, x - \xi) f(\xi) d\xi = G(t, x) * f(x), \quad (t, x) \in \Omega. \end{aligned} \quad (15)$$

Коректність проведених тут перетворень, а отже, правильність формули (15) впливає з властивостей функції G , які наведено далі. Властивості функції G визначають властивості функції Q , оскільки $G = F^{-1}[Q]$. Отже, насамперед дослідимо властивості функції $Q(t, \sigma)$ як функції змінної σ .

Лема 2. Для похідних функції $Q(t, \sigma)$ правильними є оцінки

$$|D_{\sigma}^s Q(t, \sigma)| \leq c A^s t^{\nu s} s^s \exp\{-t|\sigma|^{\omega}\}, \quad s \in \mathbb{N}, \quad (16)$$

де $\nu = 0$, якщо $0 < t \leq 1$ і $\nu = 1$, якщо $t > 1$, сталі $c, A > 0$ не залежать від t .

Доведення. Для доведення твердження скористаємося формулою Фаа ді Бруно диференціювання складеної функції

$$D_{\sigma}^s F(g(\sigma)) = \sum_{p=1}^s \frac{d^p F(g)}{dg^p} \sum \frac{s!}{p_1! \dots p_l!} \left(\frac{d}{d\sigma} g(\sigma) \right)^{p_1} \dots \left(\frac{1}{l!} \frac{d^l}{d\sigma^l} g(\sigma) \right)^{p_l} \quad (17)$$

(знак суми поширюється на всі розв'язки в цілих невід'ємних числах рівняння $p_1 + 2p_2 + \dots + lp_l = s$, $p_1 + p_2 + \dots + p_l = p$), де покладемо $F = e^g$, $g = -ta(\sigma)$. Тоді

$$D_{\sigma}^s e^{-ta(\sigma)} = e^{-ta(\sigma)} \sum_{p=1}^s \sum \frac{s!}{p_1! \dots p_l!} \Lambda,$$

де символом Λ позначено вираз

$$\Lambda := \left(\frac{d}{d\sigma} (-ta(\sigma)) \right)^{p_1} \left(\frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\sigma^2} (-ta(\sigma)) \right)^{p_2} \dots \left(\frac{1}{l!} \frac{d^l}{d\sigma^l} (-ta(\sigma)) \right)^{p_l}.$$

Урахувавши (7), знайдемо

$$|\Lambda| \leq c_0^{p_1 + \dots + p_l} L_0^{p_1 + 2p_2 + \dots + lp_l} t^{p_1 + \dots + p_l} \leq \tilde{c}_0^p t^p L_0^s, \quad (18)$$

де $\tilde{c}_0 = \max\{1, c_0\}$. Скориставшись (18), нерівністю $a(\sigma) = \varphi_{p,\omega}(\sigma) \geq |\sigma|^{\omega}$ і формулою Стірлінга, одержимо нерівності

$$|D_{\sigma}^s Q_1(t, \sigma)| \leq \tilde{c}_0^s L_0^s t^{\nu s} s! \exp\{-ta(\sigma)\} \leq c A^s t^{\nu s} s^s \exp\{-t|\sigma|^{\omega}\}, \quad (19)$$

де $\nu = 0$, якщо $0 < t \leq 1$, і $\nu = 1$, якщо $t > 1$, сталі $c, A > 0$ не залежать від t .

Лему 2 доведено.

Зауваження 2. Із оцінок (16) випливає, що $Q_1(t, \cdot) \in S_{1/\omega}^1$ при кожному $t > 0$.

Лема 3. Функція Q_2 — мультиплікатор у просторі $S_{1/\omega}^2$.

Доведення. Для доведення твердження здійснимо оцінку похідних функції Q_2 . Для цього скористаємося формулою (17), у якій покладемо $F = \varphi^{-1}$, $\varphi = R$, де

$$R(\sigma) = \mu - \sum_{k=1}^m \mu_k g_k(\sigma) \exp\{-t_k a(\sigma)\}.$$

Тоді $Q_2(\sigma) = F(\varphi) = R^{-1}$ і

$$|D_\sigma^s Q_2(\sigma)| = \left| \sum_{p=1}^s \frac{d^p}{dR^p} R^{-1} \sum \frac{s!}{p_1! \dots p_l!} \left(\frac{d}{d\sigma} R(\sigma) \right)^{p_1} \dots \left(\frac{1}{l!} \frac{d^l}{d\sigma^l} R(\sigma) \right)^{p_l} \right|, \quad s \in \mathbb{N}.$$

Врахувавши властивості функцій $g_1, \dots, g_m$ і нерівності (19), знайдемо

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{j!} \frac{d^j}{d\sigma^j} R(\sigma) \right| &\leq \frac{1}{j!} \sum_{k=1}^m \mu_k \sum_{i=0}^j C_j^i |D_\sigma^i g_k(\sigma)| \left| D_\sigma^{j-i} e^{-t_k a(\sigma)} \right| \\ &\leq \frac{1}{j!} \sum_{k=1}^m \mu_k \sum_{i=0}^j C_j^i M_k^i i! (\tilde{c}_0 L_0)^{j-i} t_k^{\nu(j-i)} (j-i)! e^{-t_k a(\sigma)} \\ &\leq \sum_{k=1}^m \mu_k \sum_{i=0}^j C_j^i M_k^i (\tilde{c}_0 L_0)^{j-i} t_k^{\nu(j-i)} \end{aligned}$$

(тут враховано, що $i!(j-i)! \leq j!$). Нехай

$$\tilde{M} = \max\{M_1, \dots, M_m\}, \quad M_0 = 2 \max\{\tilde{c}_0 L_0 T, \tilde{M}\}.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{j!} \frac{d^j}{d\sigma^j} R(\sigma) \right| &\leq \alpha_0 M_0^j, \quad \alpha_0 = \sum_{k=1}^m \mu_k, \quad j \in \{1, \dots, l\}, \\ \left| \left(\frac{d}{d\sigma} R(\sigma) \right)^{p_1} \right| \dots \left| \left(\frac{1}{l!} \frac{d^l}{d\sigma^l} R(\sigma) \right)^{p_l} \right| &\leq (\alpha_0 M_0)^{p_1} (\alpha_0 M_0^2)^{p_2} \dots (\alpha_0 M_0^l)^{p_l} \\ &\leq \alpha_0^{p_1 + \dots + p_l} M_0^{p_1 + 2p_2 + \dots + lp_l} \leq \alpha_0^p M_0^s. \end{aligned}$$

Крім того,

$$\begin{aligned} \frac{d^p}{dR^p} R^{-1} &= (-1)^p p! R^{-(p+1)}, \\ R^{-1}(\sigma) = Q_2(\sigma) &= \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k g_k(\sigma) \exp\{-t_k a(\sigma)\} \right)^{-1} \\ &\leq \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \exp\{\varepsilon |\sigma|^\omega - t_1 |\sigma|^\omega\} \right)^{-1} \leq \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k \right)^{-1} \equiv \beta_0, \quad \varepsilon = t_1. \end{aligned}$$

Оскільки, за умовою, $\mu > \sum_{k=1}^m \mu_k$, то $\beta_0 > 0$. Тут також враховані властивості функцій $g_1, \dots, g_m$ і те, що $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m$. Отже,

$$\left| \frac{d^p}{dR^p} R^{-1} \right| \leq \beta_0^{p+1} p!,$$

$$|D_\sigma^s Q_2(\sigma)| \leq s! \sum_{p=1}^s \beta_0^{p+1} p! \alpha_0^p M_0^s \leq \beta_0 M_0^s s(s!)^2 \beta_0^s \leq \beta_1 \beta_2^s s^{2s}. \quad (20)$$

Далі доведення здійснюватимемо за схемою доведення леми 1. Доводимо, що $Q_2\varphi \in S_{1/\omega}^2$ для довільної функції $\varphi \in S_{1/\omega}^2$, відображення $\varphi \rightarrow Q_2\varphi$ є неперервним оператором у просторі $S_{1/\omega}^2$, при цьому використовуються оцінки (4) і властивість обмеженості функції $Q_2(\sigma)$ на $\mathbb{R}$.

Лему 3 доведено.

Наслідок 1. При кожному $t > 0$ функція $Q(t, \sigma) = Q_1(t, \sigma)Q_2(\sigma)$ є елементом простору $S_{1/\omega}^2$, при цьому справджуються оцінки

$$|D_\sigma^s Q(t, \sigma)| \leq \tilde{c} \tilde{A}^s t^{\nu s} s^{2s} \exp\{-t|\sigma|^\omega\}, \quad (t, \sigma) \in \Omega, \quad s \in \mathbb{Z}_+,$$

де сталі $\tilde{c}$, $\tilde{A} > 0$ не залежать від t .

Урахувавши властивості перетворення Фур'є (прямого та оберненого) та формулу $F^{-1}[S_{1/\omega}^2] = S_2^{1/\omega}$, одержимо, що $G(t, \cdot) \in S_2^{1/\omega}$ при кожному $t > 0$. Виділимо в оцінках похідних функції G (за змінною x) залежність від t , вважаючи $t > 1$. Для цього скористаємося співвідношенням

$$x^k D_x^s F[\varphi](x) = i^{k+s} F\left[(\sigma^s \varphi(\sigma))^{(k)}\right] = i^{k+s} \int_{\mathbb{R}} (\sigma^s \varphi(\sigma))^{(k)} e^{i\sigma x} d\sigma, \quad \{k, s\} \subset \mathbb{Z}_+.$$

Отже,

$$x^k D_x^s G(t, x) = (2\pi)^{-1} i^{k+s} (-1)^s \int_{\mathbb{R}} (\sigma^s Q(t, -\sigma))^{(k)} e^{i\sigma x} d\sigma.$$

Застосувавши формулу Лейбніца диференціювання добутку двох функцій і оцінки похідних функції $Q(t, \sigma)$, знайдемо

$$\begin{aligned} |(\sigma^s Q(t, -\sigma))^{(k)}| &= \left| \sum_{p=0}^k C_k^p (\sigma^s)^{(p)} Q^{(k-p)}(t, -\sigma) \right| \\ &\leq \left| \sigma^s Q^{(k)}(t, -\sigma) \right| + ks \left| \sigma^{s-1} Q^{(k-1)}(t, -\sigma) \right| \\ &\quad + \frac{k(k-1)}{2!} s(s-1) \left| \sigma^{s-2} Q^{(k-2)}(t, -\sigma) \right| + \dots \\ &\leq \tilde{c} \left[\tilde{A}^k t^{\nu k} \tilde{B}^s t^{-s/\omega} m_{ks} + ks \tilde{A}^{k-1} t^{\nu(k-1)} \tilde{B}^{s-1} t^{-(s-1)/\omega} m_{k-1, s-1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2!} k(k-1)s(s-1) \tilde{A}^{k-2} t^{\nu(k-2)} \tilde{B}^{s-2} t^{-(s-2)/\omega} m_{k-2, s-2} + \dots \right] e^{-\frac{t}{2}|\sigma|^\omega}, \end{aligned}$$

де $m_{ks} = k^{2k} s^{s/\omega}$. Тут враховано нерівності

$$|\sigma^s e^{-t|\sigma|^\omega}| \leq e^{-\frac{t}{2}|\sigma|^\omega} \sup_{\sigma} |\sigma^s e^{-\frac{t}{2}|\sigma|^\omega}| \leq \tilde{B} s t^{-s/\omega} s^{s/\omega} e^{-\frac{t}{2}|\sigma|^\omega}, \quad \tilde{B} = \frac{2}{\omega} e^{-\frac{1}{\omega}}.$$

З урахуванням результатів, наведених у [2, с. 236–243], знайдемо, що подвійна послідовність $m_{ks} = k^{2k} s^{s/\omega}$ задовольняє нерівність

$$ks \frac{m_{k-1,s-1}}{m_{ks}} \leq \tilde{\gamma}(k+s), \quad \tilde{\gamma} > 0.$$

Урахувавши останню нерівність, а також те, що $t > 1$, одержимо

$$\begin{aligned} |(\sigma^s Q(t, -\sigma))^{(k)}| &\leq \tilde{c} \tilde{A} t^k \tilde{B}^s m_{ks} \\ &\times \left(1 + \frac{ks}{\tilde{A} \tilde{B}} \frac{m_{k-1,s-1}}{m_{ks}} + \frac{1}{2!} k(k-1)s(s-1) \frac{1}{\tilde{A}^2 \tilde{B}^2} \frac{m_{k-2,s-2}}{m_{ks}} + \dots \right) \\ &\times e^{-\frac{t}{2}|\sigma|^\omega} \leq \tilde{c} \tilde{A} t^k \tilde{B}^s m_{ks} \left(1 + \frac{ks}{\tilde{A} \tilde{B}} \frac{m_{k-1,s-1}}{m_{ks}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2!} \frac{1}{\tilde{A}^2 \tilde{B}^2} ks \frac{m_{k-1,s-1}}{m_{ks}} (k-1)(s-1) \frac{m_{k-2,s-2}}{m_{k-1,s-1}} + \dots \right) e^{-\frac{t}{2}|\sigma|^\omega} \\ &\leq \tilde{c} \tilde{A} t^k \tilde{B}^s m_{ks} \left(1 + \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{A} \tilde{B}} (k+s) + \frac{1}{2!} \frac{\tilde{\gamma}^2}{\tilde{A}^2 \tilde{B}^2} (k+s)^2 + \dots \right) e^{-\frac{t}{2}|\sigma|^\omega} \\ &\leq c_1 \bar{A} t^k \bar{B}^s m_{ks} e^{-\frac{t}{2}|\sigma|^\omega}, \quad \bar{A} = \tilde{A} \exp \left\{ \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{A} \tilde{B}} \right\}, \quad \bar{B} = \tilde{B} \exp \left\{ \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{A} \tilde{B}} \right\}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} |x^k D_x^s G(t, x)| &\leq (2\pi)^{-1} c_1 \bar{A} t^k \bar{B}^s m_{ks} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t}{2}|\sigma|^\omega} d\sigma \\ &= c_2 \bar{A} t^k \bar{B}^s t^{-1/\omega} k^{2k} s^{s/\omega}, \quad \{k, s\} \subset \mathbb{Z}_+. \end{aligned}$$

Тоді

$$|D_x^s G(t, x)| \leq c_2 \bar{B}^s t^{-1/\omega} s^{s/\omega} \inf_k \frac{\bar{A}^k k^{2k}}{(t^{-1}|x|)^k} \leq c_3 \bar{B}^s t^{-1/\omega} s^{s/\omega} \exp \{-a_0 t^{-1/2} |x|^{1/2}\},$$

де сталі $c_3, \bar{B}, a_0 > 0$ не залежать від t ; тут ми скористалися відомою нерівністю з [2, с. 204]:

$$e^{-\frac{\alpha}{e}|\xi|^{1/\alpha}} \leq \inf_k \frac{L^k k^{k\alpha}}{|\xi|^k} \leq c e^{-\frac{\alpha}{e}|\xi|^\alpha}, \quad c = e^{\frac{\alpha e}{2}},$$

в якій $\alpha = 2$, $L = \bar{A}$.

Таким чином, справедливим є таке твердження.

Лема 4. Похідні функції $G(t, x)$ (за змінною x) при $t > 1$ задовольняють нерівності

$$|D_x^s G(t, x)| \leq c_3 \bar{B}^s s^{s/\omega} t^{-1/\omega} \exp \{-at^{-1/2} |x|^{1/2}\}, \quad s \in \mathbb{Z}_+, \quad (21)$$

сталі $c_3, \bar{B}, a_0 > 0$ не залежать від t .

Лема 5. Функція $G(t, \cdot)$, $t \in (0, +\infty)$, як абстрактна функція параметра t зі значеннями у просторі $S_2^{1/\omega}$ диференційовна по t .

Доведення. Із властивості неперервності перетворення Фур'є (прямого та оберненого) випливає, що для доведення твердження досить встановити, що функція $F[G(t, \cdot)] = Q(t, \cdot)$ як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $S_{1/\omega}^2$ диференційовна по t . Іншими словами, потрібно довести, що граничне співвідношення

$$\Phi_{\Delta t}(\sigma) := \frac{1}{\Delta t} [Q(t + \Delta t, \cdot) - Q(t, \cdot)] \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} Q(t, \cdot), \quad \Delta t \rightarrow 0,$$

виконується в тому розумінні, що:

- 1) $D_\sigma^s \Phi_{\Delta t}(\sigma) \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} D_\sigma^s(-a(\sigma)Q(t, \sigma))$, $s \in \mathbb{Z}_+$, рівномірно на кожному відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$;
- 2) $|D_\sigma^s \Phi_{\Delta t}(\sigma)| \leq \bar{c} \bar{B}^s s^{2s} \exp\{-\bar{a}|\sigma|^\omega\}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, де сталі $\bar{c}, \bar{B}, \bar{a} > 0$ не залежать від Δt , якщо Δt досить мале.

Функція $Q(t, \sigma)$, $(t, \sigma) \in \Omega$, диференційовна по t у звичайному розумінні. Внаслідок теореми Лагранжа про скінченні прирости

$$\Phi_{\Delta t}(\sigma) = -a(\sigma)Q(t + \theta\Delta t, \sigma).$$

Отже,

$$D_\sigma^s \Phi_{\Delta t}(\sigma) = - \sum_{l=0}^s C_s^l D_\sigma^l a(\sigma) D_\sigma^{s-l} Q(t + \theta\Delta t, \sigma)$$

і

$$D_\sigma^s \left(\Phi_{\Delta t}(\sigma) - \frac{\partial}{\partial t} Q(t, \sigma) \right) = - \sum_{l=0}^s C_s^l D_\sigma^l a(\sigma) \left[D_\sigma^{s-l} Q(t + \theta\Delta t, \sigma) - D_\sigma^{s-l} Q(t, \sigma) \right].$$

Оскільки

$$D_\sigma^{s-l} Q(t + \theta\Delta t, \sigma) - D_\sigma^{s-l} Q(t, \sigma) = D_\sigma^{s-l+1} Q(t + \theta_1\Delta t, \sigma) \theta\Delta t, \quad 0 < \theta_1 < 1,$$

то звідси та з оцінок (16) випливає

$$D_\sigma^{s-l+1} Q(t + \theta_1\Delta t, \sigma) \theta\Delta t \rightarrow 0, \quad \Delta t \rightarrow 0,$$

рівномірно на довільному відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Тоді й

$$D_\sigma^s \Phi_{\Delta t}(\sigma) \rightarrow D_\sigma^s \left(\frac{\partial}{\partial t} Q(t, \sigma) \right), \quad \Delta t \rightarrow 0,$$

рівномірно на кожному відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Отже, умова 1) виконується.

Урахувавши оцінки, які задовольняють функції $a(\sigma)$, $Q(t, \sigma)$ та їхні похідні, знайдемо

$$|D_\sigma^s \Phi_{\Delta t}(\sigma)| \leq c_1 c_\varepsilon \sum_{l=0}^s C_s^l B_1^l l! \tilde{A}^{s-l} t^{\nu(s-l)} (s-l)^{2(s-l)} \exp\{-(t + \theta\Delta t)|\sigma|^\omega + \varepsilon|\sigma|^\omega\}$$

(тут $\varepsilon > 0$ — довільно фіксований параметр). Візьмемо $\varepsilon = t/2$. Тоді

$$|D_\sigma^s \Phi_{\Delta t}(\sigma)| \leq \bar{c} \bar{B}^s s^{2s} \exp\{-\bar{a}|\sigma|^\omega\}, \quad s \in \mathbb{Z}_+,$$

де $\bar{B} = 2 \max\{B_1, \tilde{A}t^\nu\}$, $\bar{a} = t/2$, причому всі сталі не залежать від Δt .

Наслідок 2. Правильною є формула

$$\frac{\partial}{\partial t} (f * G(t, \cdot)) = f * \frac{\partial G(t, \cdot)}{\partial t} \quad \forall f \in (S_2^{1/\omega})', \quad t > 0.$$

Доведення. Згідно з означенням згортки узагальненої функції з основною

$$f * G(t, \cdot) = \langle f_\xi, T_{-x} \check{G}(t, \xi) \rangle, \quad \check{G}(t, \xi) = G(t, -\xi).$$

Тоді

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (f * G(t, \cdot)) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [(f * G(t + \Delta t, \cdot)) - (f * G(t, \cdot))] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\langle f_\xi, \frac{1}{\Delta t} [T_{-x} \check{G}(t + \Delta t, \xi) - T_{-x} \check{G}(t, \xi)] \right\rangle. \end{aligned}$$

Унаслідок леми 5 граничне співвідношення

$$\frac{1}{\Delta t} [T_{-x} \check{G}(t + \Delta t, \xi) - T_{-x} \check{G}(t, \xi)] \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t} T_{-x} \check{G}(t, \xi), \quad \Delta t \rightarrow 0,$$

виконується в сенсі збіжності за топологією простору $S_2^{1/\omega}$. Тому

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (f * G(t, \cdot)) &= \left\langle f_\xi, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [T_{-x} \check{G}(t + \Delta t, \xi) - T_{-x} \check{G}(t, \xi)] \right\rangle \\ &= \left\langle f_\xi, \frac{\partial}{\partial t} T_{-x} \check{G}(t, \xi) \right\rangle = \left\langle f_\xi, T_{-x} \frac{\partial}{\partial t} \check{G}(t, \xi) \right\rangle = f * \frac{\partial}{\partial t} G(t, \cdot). \end{aligned}$$

Твердження доведено.

Оскільки

$$F[G(t, \cdot)] = Q(t, \sigma) = Q_1(t, \sigma) Q_2(\sigma) = \int_{\mathbb{R}} G(t, x) e^{i\sigma x} dx, \quad t > 0,$$

то звідси одержуємо формулу

$$\int_{\mathbb{R}} G(t, x) dx = Q_1(t, 0) Q_2(0) = \lambda_0 e^{-t}, \quad \lambda_0 = \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k g_k(0) e^{-t_k} \right)^{-1}$$

(тут враховано, що $a(0) = 1$).

Лема 6. У просторі $(S_2^{1/\omega})'$ правильними є співвідношення

$$1) \quad G(t, \cdot) \rightarrow F^{-1}[Q_2], \quad t \rightarrow +0;$$

$$2) \quad \mu G(t, \cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k B_k G(t_k, \cdot) \rightarrow \delta, \quad t \rightarrow +0 \quad (22)$$

(тут δ — дельта-функція Дірака).

Доведення. 1. Урахувавши властивість неперервності перетворення Фур'є (прямого та оберненого) у просторах типу S' , для доведення твердження досить встановити, що

$$F[G(t, \cdot)] = Q_1(t, \cdot)Q_2(\cdot) \rightarrow Q_2(\cdot), \quad t \rightarrow +0,$$

у просторі $(S_{1/\omega}^2)'$. Для цього візьмемо довільну функцію $\varphi \in S_{1/\omega}^2$ і, скориставшись тим, що Q_2 — мультиплікатор у просторі $S_{1/\omega}^2$, а також теоремою Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла Лебега, знайдемо, що

$$\begin{aligned} \langle Q_1(t, \cdot)Q_2(\cdot), \psi \rangle &= \langle Q_1(t, \cdot), Q_2(\cdot)\varphi(\cdot) \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} Q_1(t, \sigma)Q_2(\sigma)\varphi(\sigma) d\sigma \xrightarrow{t \rightarrow +0} \int_{\mathbb{R}} Q_2(\sigma)\varphi(\sigma) d\sigma \\ &= \langle 1, Q_2(\cdot)\varphi(\cdot) \rangle = \langle Q_2, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Звідси вже випливає твердження 1.

2. Урахувавши твердження 1 і вигляд операторів $B_1, \dots, B_m$ одержимо

$$\begin{aligned} \mu G(t, \cdot) - \sum_{l=1}^m \mu_l B_l G(t_l, \cdot) &\xrightarrow{t \rightarrow +0} \mu F^{-1}[Q_2] - \sum_{l=1}^m \mu_l B_l G(t_l, \cdot) \\ &= \mu F^{-1}[Q_2] - \sum_{l=1}^m \mu_l F^{-1}[g_l(\cdot)Q_1(t_l, \cdot)Q_2(\cdot)] \\ &= F^{-1} \left[\mu Q_2 - \sum_{l=1}^m \mu_l g_l(\cdot)Q_1(t_l, \cdot)Q_2(\cdot) \right] \\ &= F^{-1} \left[\left(\mu - \sum_{l=1}^m \mu_l g_l(\cdot)Q_1(t_l, \cdot) \right) Q_2(\cdot) \right] \\ &= F^{-1} \left[\left(\mu - \sum_{l=1}^m \mu_l g_l(\cdot)Q_1(t_l, \cdot) \right) \left(\mu - \sum_{l=1}^m \mu_l g_l(\cdot)Q_1(t_l, \cdot) \right)^{-1} \right] \\ &= F^{-1}[1] = \delta. \end{aligned}$$

Отже, співвідношення (22) виконується у просторі $(S_2^{1/\omega})'$.

Лему 6 доведено.

Зауваження 3. Якщо $\mu = 1$, $\mu_1 = \dots = \mu_m = 0$, то задача (10), (11) вироджується в задачу Коші для рівняння (10). У цьому випадку $Q_2(\sigma) = 1 \quad \forall \sigma \in \mathbb{R}$, $G(t, x) = F^{-1}[e^{-ta(\sigma)}]$ і $G(t, \cdot) \rightarrow F^{-1}[1] = \delta$ при $t \rightarrow +0$ у просторі $(S_1^{1/\omega})'$.

Наслідок 3. Нехай

$$\omega(t, x) = f * G(t, x), \quad f \in (S_{2,*}^{1/\omega})', \quad (t, x) \in \Omega$$

(тут $(S_{2,*}^{1/\omega})'$ — клас згортувачів у просторі $S_2^{1/\omega}$). Тоді у просторі $(S_2^{1/\omega})'$ виконується граничне співвідношення

$$\mu\omega(t, \cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k B_k \omega(t_k, \cdot) \rightarrow f, \quad t \rightarrow +0.$$

Доведення. Доведемо, що граничне співвідношення

$$F \left[\mu\omega(t, \cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k B_k \omega(t_k, \cdot) \right] \rightarrow F[f], \quad t \rightarrow +0,$$

виконується у просторі $(S_{1/\omega}^2)'$. Оскільки $f \in (S_{2,*}^{1/\omega})'$, $G(t, \cdot) \in S_2^{1/\omega}$ при кожному $t > 0$, то

$$F[f * G(t, \cdot)] = F[f] \cdot F[G(t, \cdot)] = F[f] \cdot Q(t, \cdot).$$

Звідси випливає, що співвідношення

$$\begin{aligned} F \left[\mu\omega(t, \cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k B_k \omega(t_k, \cdot) \right] &= F[f] \left(\mu Q(t, \cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k g_k(\cdot) Q(t_k, \cdot) \right) \\ &\xrightarrow{t \rightarrow +0} F[f] \left(\mu Q_2 - \sum_{k=1}^m \mu_k g_k(\cdot) Q_1(t_k, \cdot) Q_2(\cdot) \right) \\ &= F[f] \left[\left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k g_k(\cdot) Q_1(t_k, \cdot) \right) Q_2(\cdot) \right] = F[f] \end{aligned}$$

виконується у просторі $(S_{1/\omega}^2)'$ (тут враховано, що $Q(t, \cdot) \rightarrow Q_2(\cdot)$ при $t \rightarrow +0$ у просторі $(S_{1/\omega}^2)'$; див. доведення твердження 1 леми б).

Твердження доведено.

Функція $G(t, x)$ задовольняє рівняння (10). Справді,

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t, \cdot) = \frac{\partial}{\partial t} F^{-1}[Q(t, \cdot)] = F^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial t} Q(t, \sigma) \right] = -F^{-1}[a(\sigma)Q(t, \sigma)],$$

$$\hat{B}G(t, \cdot) = F^{-1}[a(\sigma)F[G(t, \cdot)]] = F^{-1}[a(\sigma)Q(t, \sigma)].$$

Отже,

$$\frac{\partial G(t, x)}{\partial t} + \hat{B}G(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \Omega,$$

що й потрібно було довести.

Функцію G далі називатимемо фундаментальним розв'язком нелокальної багатоточкової за часом задачі для рівняння (10).

З наслідку 3 випливає, що для рівняння (10) нелокальну багатоточкову за часом задачу можна ставити так: знайти функцію $u(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, яка задовольняє рівняння (10) та умову

$$\mu \lim_{t \rightarrow +0} u(t, \cdot) - \sum_{k=1}^m \mu_k B_k u(t_k, \cdot) = f, \quad f \in (S_{2,*}^{1/\omega})', \quad (23)$$

де граничне співвідношення (23) розглядається у просторі $(S_2^{1/\omega})'$ (обмеження на параметри $\mu, \mu_1, \dots, \mu_m, t_1, \dots, t_m$ і оператори $B_1, \dots, B_m$ такі ж, як і у випадку задачі (10), (11)).

Теорема 1. *Задача (10), (23) є розв'язною, розв'язок визначає формула*

$$u(t, x) = f * G(t, x), \quad (t, x) \in \Omega,$$

де $G(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, — фундаментальний розв'язок багатоточкової задачі для рівняння (10), $u(t, \cdot) \in S_2^{1/\omega}$ при кожному $t > 0$.

Доведення. Переконаємося в тому, що функція $u(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, задовольняє рівняння (10). Справді (див. наслідок 2),

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (f * G(t, \cdot)) = f * \frac{\partial}{\partial t} G(t, x)$$

і

$$\hat{B}u(t, x) = F^{-1}[a(\sigma)F[f * G(t, \cdot)]].$$

Оскільки f — згортувач у просторі $S_2^{1/\omega}$, то

$$F[f * G(t, \cdot)] = F[f]F[G(t, \cdot)] = F[f]Q(t, \cdot).$$

Отже,

$$\begin{aligned} \hat{B}u(t, x) &= F^{-1}[a(\sigma)Q(t, \sigma)F[f](\sigma)] = -F^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t} Q(t, \cdot)F[f]\right] \\ &= -F^{-1}\left[F\left[\frac{\partial}{\partial t} G(t, \cdot)\right]F[f]\right] \\ &= -F^{-1}\left[F\left[f * \frac{\partial G(t, \cdot)}{\partial t}\right]\right] = -f * \frac{\partial G(t, \cdot)}{\partial t}. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що функція $u(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, задовольняє рівняння (10). З наслідку 3 маємо, що функція $u(t, x)$ задовольняє умову (23) у вказаному сенсі.

Теорему 1 доведено.

Зауваження 4. Якщо в умові (23) $B_1 = \dots = B_m = I$ (I — одиничний оператор), то можна довести, що тоді задача (10), (23) коректно розв'язна, розв'язок визначає формула $u(t, x) = f * G(t, x)$, $f \in (S_{1,*}^{1/\omega})'$, $(t, x) \in \Omega$, $G(t, x) = F^{-1}[Q(t, \cdot)]$,

$$Q(t, \sigma) = e^{-ta(\sigma)} \left(\mu - \sum_{k=1}^m \mu_k e^{-t_k a(\sigma)} \right)^{-1},$$

$G(t, \cdot) \in S_1^{1/\omega}$ при кожному $t > 0$.

Теорема 2. *Нехай $u(t, x)$, $(t, x) \in \Omega$, — розв'язок задачі (10), (23). Тоді $u(t, \cdot) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ у просторі $(S_2^{1/\omega})'$.*

Доведення. Розв'язок задачі (10), (23) визначає формула

$$u(t, x) = f * G(t, x) = \langle f_\xi, G(t, x - \xi) \rangle, \quad f \in (S_{2,*}^{1/\omega})', \quad (t, x) \in \Omega.$$

Доведемо, що $\langle u(t, \cdot), \varphi \rangle \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ для довільної функції $\varphi \in S_2^{1/\omega}$. Покладемо

$$\Psi_t(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, x - \xi) \varphi(x) dx, \quad \Psi_{t,R}(\xi) = \int_{-R}^R G(t, x - \xi) \varphi(x) dx, \quad R > 0, \quad t > 1.$$

У цих позначеннях доведемо, що: а) при кожному $t > 1$ і $R > 0$ функція $\Psi_{t,R}(\xi)$ є елементом простору $S_2^{1/\omega}$ і $\Psi_{t,R}(\xi) \rightarrow \Psi_t(\xi)$ при $R \rightarrow +\infty$ у просторі $S_2^{1/\omega}$; б) $\Psi_t(\xi) \in S_2^{1/\omega}$ при кожному $t > 1$. Звідси дістаємо, що

$$\begin{aligned} \langle u(t, \cdot), \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \langle f_\xi, G(t, x - \xi) \rangle \varphi(x) dx = \left\langle f_\xi, \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, x) \varphi(x + \xi) dx \right\rangle \\ &= \left\langle f_\xi, \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, -y) \varphi(-(y - \xi)) dy \right\rangle \\ &= \left\langle f_\xi, \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, -y) \check{\varphi}(y - \xi) dy \right\rangle, \quad \check{\varphi}(z) = \varphi(-z) \end{aligned}$$

(тут $u(t, \cdot)$ розуміємо як регулярну узагальнену функцію з простору $(S_2^{1/\omega})'$ при кожному $t > 0$).

Отже, встановимо властивість а) при фіксованих $\{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+$. Маємо

$$\left| \xi^k D_\xi^m \Psi_{t,R}(\xi) \right| \leq \int_{-R}^R \left| \xi^k \varphi(x) D_\xi^m G(t, x - \xi) \right| dx \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \xi^k \varphi(\xi + \eta) D_\eta^m G(t, \eta) \right| d\eta.$$

Але $\varphi \in S_2^{1/\omega}$, а тому при деяких $c, L, M > 0$

$$\left| \xi^k D_\xi^m \varphi(\xi) \right| \leq c L^k M^m k^{2k} m^{m/\omega}, \quad \{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+.$$

Звідси при кожному $\eta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \left| \xi^k \varphi(\xi + \eta) \right| &= \sup_{y \in \mathbb{R}} \left| (y - \eta)^k \varphi(y) \right| = \sup_{y \in \mathbb{R}} \left| \sum_{l=0}^k C_k^l y^l (-\eta)^{k-l} \varphi(y) \right| \\ &\leq \sum_{l=0}^k C_k^l |\eta|^{k-l} \sup_{y \in \mathbb{R}} |y^l \varphi(y)| \leq c \sum_{l=0}^k C_k^l L^l l^{2l} |\eta|^{k-l}. \end{aligned}$$

Далі скористаємося оцінками (21). Тоді

$$\begin{aligned} \left| \xi^k D_\xi^m \Psi_{t,R}(\xi) \right| &\leq c \sum_{l=0}^k C_k^l L^l l^{2l} \int_{-\infty}^{+\infty} |\eta|^{k-l} |D_\eta^m G(t, \eta)| d\eta \\ &\leq c c_3 \bar{B}^m m^{m/\omega} t^{-1/\omega} \sum_{l=0}^k C_k^l L^l l^{2l} \int_{-\infty}^{+\infty} |\eta|^{k-l} \exp \left\{ -a_0 t^{-1/2} |\eta|^{1/2} \right\} d\eta. \end{aligned}$$

За допомогою безпосередніх обчислень знаходимо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\eta|^{k-l} \exp \{-a_0 t^{1/2} |\eta|^{1/2}\} d\eta \leq c_4 \tilde{L}^k k^{2(k-l)} t^{k-l+1}, \quad c_4, \tilde{L} > 0.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} \left| \xi^k D_\xi^m \Psi_{t,R}(\xi) \right| &\leq c c_3 c_4 \bar{B}^m t^{1-1/\omega} m^{m/\omega} \sum_{l=0}^k C_k^l L^l \tilde{L}^{k-l} t^{k-l} l^{2l} k^{2(k-l)} \\ &\leq \bar{c} \bar{B}^m \bar{L}^k k^{2k} m^{m/\omega}, \end{aligned} \quad (24)$$

де $\bar{c} = c c_3 c_4 t^{1-1/\omega}$, $\bar{L} = 2 \max\{L, \tilde{L}\}$. Отже, $\Psi_{t,R}(\xi) \in S_2^{1/\omega}$ при кожному $t > 1$ і довільному $R > 0$. Далі безпосередньо переконуємося у тому, що $\Psi_{t,R}(\xi) \rightarrow \Psi_t(\xi)$ при $R \rightarrow \infty$ рівномірно по ξ разом з усіма своїми похідними на кожному відрізку $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Крім того, сукупність функцій $|\xi^k D_\xi^m \Psi_{t,R}(\xi)|$, $\{k, m\} \subset \mathbb{Z}_+$, рівномірно обмежена (по R) у просторі $S_2^{1/\omega}$ (ця властивість випливає з оцінок (24), в яких сталі $\bar{c}$, $\bar{B}$, $\bar{L} > 0$ не залежать від R). Це й означає виконання умови а).

З умови а) випливає б), оскільки в досконалому просторі кожна обмежена множина є компактною.

Використовуючи властивості а), б), отримаємо співвідношення

$$\langle u(t, \cdot), \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, -y) (f * \check{\varphi})(y) dy.$$

Оскільки $f \in (S_2^{1/\omega})'$ — згортувач у просторі $S_2^{1/\omega}$, то $f * \check{\varphi} \in S_2^{1/\omega}$. Тоді, врахувавши оцінки (21) (при $s = 0$), отримаємо

$$\begin{aligned} |\langle u(t, \cdot), \varphi \rangle| &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t, -y)| |(f * \check{\varphi})(y)| dy \\ &\leq \frac{c}{t^{1/\omega}} \int_{-\infty}^{+\infty} |(f * \check{\varphi})(y)| dy \leq \frac{c_0}{t^{1/\omega}} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

для довільної функції $\varphi \in S_2^{1/\omega}$, тобто $u(t, \cdot) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ у просторі $(S_2^{1/\omega})'$.

Теорему 2 доведено.

Якщо узагальнена функція f в умові (23) є фінітною (тобто носій f ($\text{supp } f$) — обмежена множина в $\mathbb{R}$), то можна говорити про рівномірне прямування до нуля на $\mathbb{R}$ при $t \rightarrow +\infty$ розв'язку $u(t, x)$ задачі (10), (23). Зауважимо, що кожна фінітна узагальнена функція є згортувачем у просторах типу S . Ця властивість випливає із загального результату, який стосується теорії досконалих просторів (див. [2, с. 173]): якщо Φ — досконалий простір із диференційовною операцією зсуву, то кожен фінітний функціонал є згортувачем у просторі Φ . Фінітні функціонали утворюють досить широкий клас. Зокрема, кожна обмежена замкнена множина $F \subset \mathbb{R}$ є носієм деякої узагальненої функції [9].

Теорема 3. Нехай $u(t, x)$ — розв’язок задачі (10), (23) з початковою функцією f , яка є елементом простору $(S_2^{1/\omega})'$, де $\omega \in (0, 1)$, і $\text{supp } f$ — обмежена множина в $\mathbb{R}$. Тоді $u(t, x) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ рівномірно на $\mathbb{R}$.

Наведемо схему доведення сформульованого твердження. Нехай $\text{supp } f \subset [a_1, b_1] \subset [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}$. Розглянемо функцію $\varphi \in S_2^{1/\omega}$ таку, що $\varphi(x) = 1$, $x \in [a_1, b_1]$, $\text{supp } \varphi \subset [a_2, b_2]$. Оскільки $1/\omega > 1$, то в просторі $S_2^{1/\omega}$ фінитні функції існують [2]. Подамо функцію $u(t, x)$ у вигляді

$$u(t, x) = \langle f_\xi, \varphi(\xi)G(t, x - \xi) \rangle + \langle f_\xi, \gamma(\xi)G(t, x - \xi) \rangle,$$

де $\gamma = 1 - \varphi$. Оскільки

$$\text{supp } (\gamma(\xi)G(t, x - \xi)) \cap \text{supp } f = \emptyset,$$

то

$$u(t, x) = t^{-1/\omega} \langle f_\xi, t^{1/\omega} \varphi(\xi)G(t, x - \xi) \rangle.$$

Для доведення сформульованого твердження досить встановити, що сукупність функцій $\Phi_{t,x}(\xi) = t^{1/\omega} \varphi(\xi)G(t, x - \xi)$ обмежена у просторі $S_2^{1/\omega}$ при всіх значеннях t і x .

Наприклад, якщо в (23) $f = \delta$, то δ — згортувач у просторах типу S , $\text{supp } \delta = \{0\}$ і $u(t, x) = \delta * G(t, x) = G(t, x)$. Із оцінок (21) безпосередньо випливає, що $G(t, x) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ рівномірно на $\mathbb{R}$.

Від імені всіх авторів відповідальна за листування заявляє про відсутність конфлікту інтересів.

Література

1. С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и их приложения*, Наука и техника, Минск (1987).
2. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Пространства основных и обобщенных функций*, Физматгиз, Москва (1958).
3. А. А. Дезин, *Общие вопросы теории граничных задач*, Наука, Москва (1980).
4. А. М. Нахушев, *Уравнения математической биологии*, Выс. шк., Москва (1995).
5. В. В. Городецкий, О. В. Мартинюк, *Задача Коші та нелокальні задачі для еволюційних рівнянь першого порядку за часовою змінною*, Родовід, Чернівці (2015).
6. И. А. Белавин, С. П. Капица, С. П. Курдюмов, *Математическая модель глобальных демографических процессов с учетом пространственного распределения*, Журн. вычисл. математики и мат. физики, **38**, № 6, 885–902 (1998).
7. В. В. Городецкий, В. И. Мироник, *Двухточечная задача для одного класса эволюционных уравнений. II*, Дифференц. уравнения, **46**, № 4, 520–526 (2010).
8. В. В. Городецкий, Н. И. Нагнибида, П. П. Настасиев, *Методы решения задач по функциональному анализу*, Высшая школа, Киев (1990).
9. В. В. Городецкий, *Граничні властивості гладких у шарі розв’язків рівнянь параболічного типу*, Рута, Чернівці (1998).

Одержано 06.01.23,
після доопрацювання — 12.06.23